

# Traitement du signal

---

## CHAPITRE 0

# Compléments

Dr N'CHO Janvier Sylvestre

---

---

# Circuits linéaires du 2<sup>nd</sup> ordre

# Bilans (1)

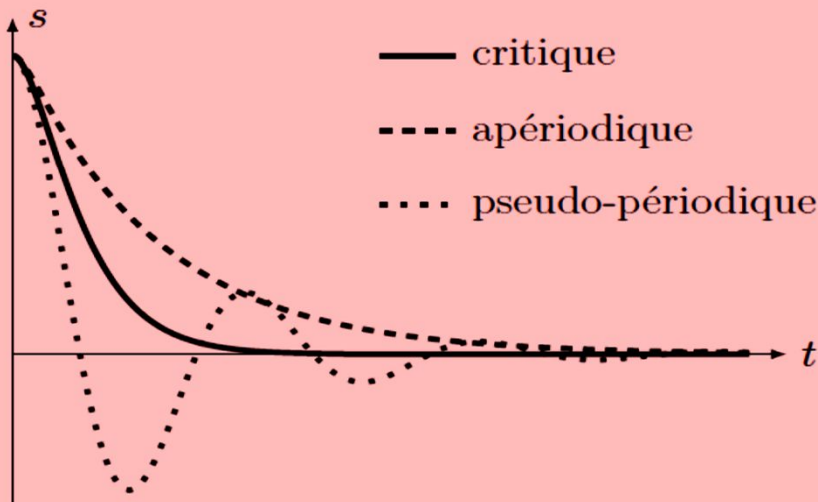
## ■ Équation différentielle d'un oscillateur amorti :

Un **oscillateur amorti** (mécanique ou électrique) en régime libre, ou en réponse à un échelon, est caractérisé par une grandeur  $s$  (position, intensité, tension, ...) qui vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 s(\infty)$$

avec la **pulsation propre**  $\omega_0$  (en rad/s) et le **facteur de qualité**  $Q$  (sans unité), des constantes positives **dépendant des paramètres de l'oscillateur**,  
et  $s(\infty)$  la valeur finale atteinte par  $s$  à la fin du régime transitoire (après quelques  $\tau$ ).

## ■ Différents régimes transitoires :



	$\Delta$	$Q$	$\tau$
Régime apériodique	$\Delta > 0$	$Q < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{\omega_0 Q}$
Régime critique	$\Delta = 0$	$Q = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{\omega_0}$
Régime pseudo-périodique	$\Delta < 0$	$Q > \frac{1}{2}$	$\frac{2Q}{\omega_0}$

# Bilans (2)

## ■ Durée du régime transitoire :

- La durée du régime transitoire apériodique diminue lorsque le facteur de qualité augmente.
- À  $\omega_0$  fixé, le régime permanent est atteint le plus rapidement et sans oscillation lorsque le régime transitoire est le régime transitoire critique.
- La durée d'un régime transitoire pseudo-périodique augmente lorsque le facteur de qualité augmente. Le facteur de qualité donne un ordre de grandeur du nombre d'oscillations du système durant le régime transitoire, avant qu'il atteigne le régime permanent.

$$\begin{array}{ccc} Q < \frac{1}{2} & Q = \frac{1}{2} & Q > \frac{1}{2} \\ \tau = \frac{1}{\omega_0 Q} & \tau = \frac{1}{\omega_0} & \tau = \frac{2Q}{\omega_0} \end{array}$$

Un système faiblement amorti est tel que  $Q \gg \frac{1}{2}$  (par ex. si  $R$  ou  $\alpha$  est très faible). Dans ce cas :

- $Q$  est très élevé : de nombreuses oscillations sont visibles et la durée du régime transitoire est très élevée ;
- la pseudo-pulsation et la pulsation propre sont très proches.

# Exemple de calcul de $\tau$ (1)

□ Le régime apériodique :  $\Delta > 0 \Rightarrow \alpha > 1$  ou  $Q < 1/2$

Le polynôme caractéristique admet **2 racines négatives** :

$$r_1 = -\alpha\omega_0 + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = -\omega_0 \left( \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1} \right) = -\frac{\omega_0}{2Q} \left( 1 - \sqrt{1 - 4Q^2} \right)$$

$$r_2 = -\alpha\omega_0 - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = -\omega_0 \left( \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} \right) = -\frac{\omega_0}{2Q} \left( 1 + \sqrt{1 - 4Q^2} \right)$$

La solution générale de l'équation différentielle sans second membre est :  $u_{ctr} = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$

La solution générale de l'équation différentielle est donc :

$$U_C = u_{ctr} + E \Rightarrow U_C = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + E$$

# Exemple de calcul de $\tau$ (2)

Les deux racines  $r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 - 4Q^2} = \frac{\omega_0}{2Q} (-1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2})$  sont négatives, et  $\frac{\omega_0}{2Q} (-1 - \sqrt{1 - 4Q^2}) < \frac{\omega_0}{2Q} (-1 + \sqrt{1 - 4Q^2}) < 0$ . On introduit les temps caractéristique :

$$\tau_1 = \frac{1}{\left| \frac{\omega_0}{2Q} (-1 + \sqrt{1 - 4Q^2}) \right|} \text{ et } \tau_2 = \frac{1}{\left| \frac{\omega_0}{2Q} (-1 - \sqrt{1 - 4Q^2}) \right|} = \frac{1}{\frac{\omega_0}{2Q} (1 + \sqrt{1 - 4Q^2})} < \tau_1$$

On écrit alors la solution sous la forme :

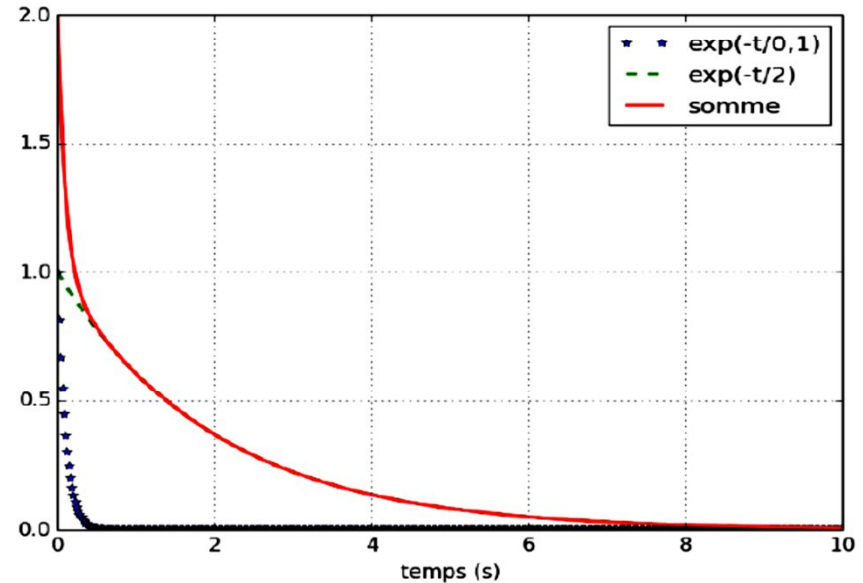
$$z(t) = Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2} + z_{\text{éq}}$$

On constate que  $\tau_2$  est plus petit que  $\tau_1$ , l'exponentielle qui décroît le plus lentement et qui impose donc la durée du régime transitoire est  $e^{-t/\tau_1}$ .

Pour déterminer l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire apériodique, il est donc nécessaire de déterminer l'ordre de grandeur de  $\tau_1$ .

On se place dans le cas  $Q \ll 1$  (en pratique  $Q < 0,1$  est une condition suffisamment contraignante).

$$\tau_1 = \frac{1}{\left| \frac{\omega_0}{2Q} (-1 + \sqrt{1 - 4Q^2}) \right|} \approx \frac{1}{\left| \frac{\omega_0}{2Q} \left( -1 + 1 - \frac{4Q^2}{2} \right) \right|} = \frac{1}{Q\omega_0}. \text{ On a utilisé : } \sqrt{1 - x} \approx 1 - \frac{x}{2}, \text{ lorsque } x \ll 1.$$



---

# Généralités sur les systèmes linéaires

# Linéarité du système (1)

Les circuits étudiés en 1ère année ne comportaient que des dipôles linéaires (résistances, bobines, condensateurs) : de tels circuits sont qualifiés de linéaires car **la relation entre les tensions d'entrée et de sortie se présente sous la forme d'une équation différentielle linéaire (du 1<sup>er</sup> ou du 2<sup>ème</sup> ordre par ailleurs)**. On donne alors une définition générale des systèmes linéaires :

Un système est linéaire si l'équation différentielle qui relie le signal de sortie  $s$  au signal d'entrée  $e$  est une équation différentielle linéaire :

$$a_0 s + a_1 \frac{ds}{dt} + a_2 \frac{d^2 s}{dt^2} + \dots + a_m \frac{d^m s}{dt^m} = b_0 e + b_1 \frac{de}{dt} + b_2 \frac{d^2 e}{dt^2} + \dots + b_n \frac{d^n e}{dt^n} + C_0$$

L'indice  $m$  est appelé « ordre du système ».

*En pratique tous les circuits électroniques réels sont tels que  $m \geq n$*



# Linéarité du système (2)

---

*Propriété importante des systèmes linéaires :*

Un système linéaire  $\Sigma$  est tel que la réponse à une combinaison linéaire d'entrées est la combinaison linéaire des sorties (les entrées étant prises séparément). Ainsi, pour :

$$e_1(t) \xrightarrow{\Sigma} s_1(t)$$

$$e_2(t) \xrightarrow{\Sigma} s_2(t)$$

on a :

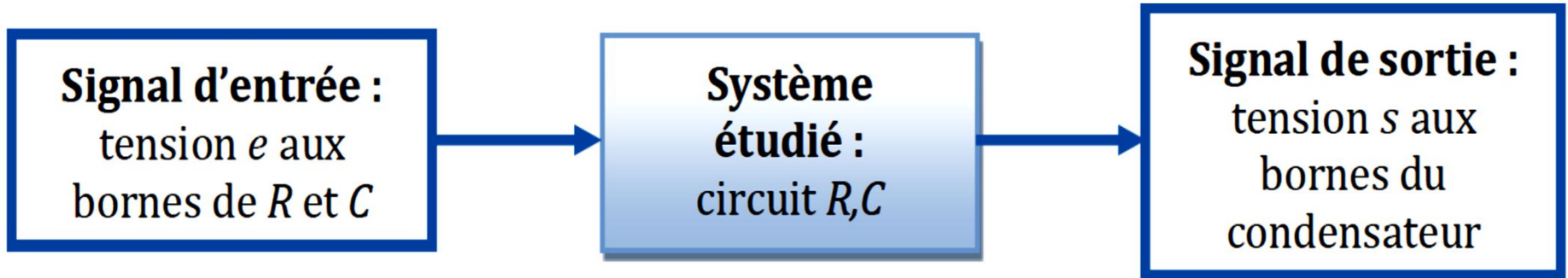
$$\alpha e_1(t) + \beta e_2(t) \xrightarrow{\Sigma} \alpha s_1(t) + \beta s_2(t)$$

L'opérateur mathématique de « transfert » associé est qualifié aussi de *linéaire*.

# Exemple (1)

---

Un circuit  $RC$  où l'on étudie la tension aux bornes du condensateur.



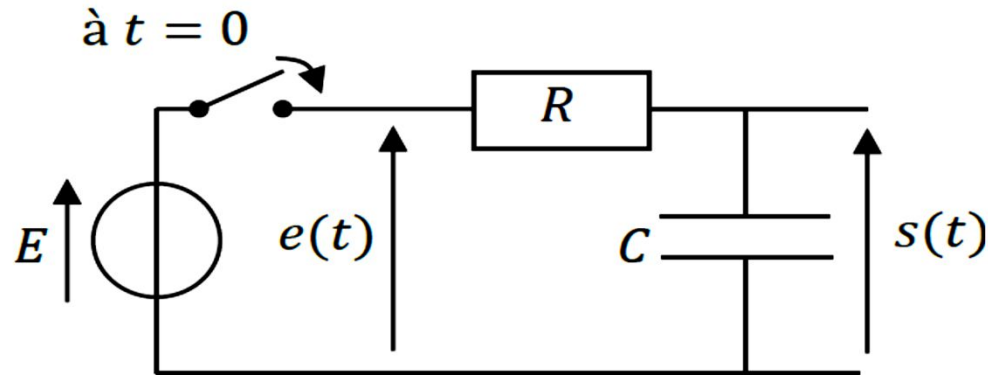
Ce système obéit à l'équation différentielle linéaire

$$RC \frac{ds}{dt} + s = e$$

pour  $t > 0$ .

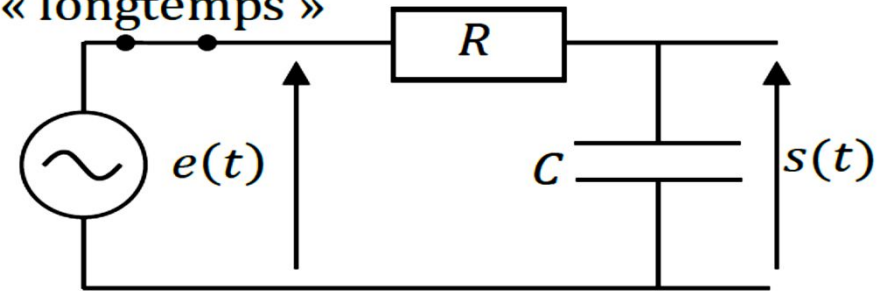
**On peut étudier ce circuit de deux manières : temporelle et fréquentielle.**

# Exemple (2)



Étude temporelle : réponse à un échelon de tension

Interrupteur  
fermé depuis  
« longtemps »



Étude fréquentielle : réponse à une excitation sinusoïdale en RSP

- ❑ Si on adopte le point de vue temporel, la résolution de l'équation différentielle donne directement la forme de  $s(t)$ .
- ❑ Si on adopte le point de vue fréquentiel, la fonction de transfert donne plus simplement la façon dont le système agit sur un signal sinusoïdal (et sur le spectre en fréquence du signal comme on le verra avec la notion de transformée de Fourier).

# Remarques (1)

---

Les systèmes rencontrés en traitement du signal cette année ne seront pas tous linéaires. Par contre ils seront tous :

- **invariants** : le comportement des systèmes étudiés reste inchangé dans le temps ; si l'on reproduit une même entrée à deux instants différents, les réponses seront identiques (décalées de ce même temps) ;
  - **continus** : les grandeurs étudiées sont définies pour tout instant  $t$  autrement dit ce sont des fonctions continues du temps au sens mathématique du terme.
-

# Remarques (2)

## Comparaison entre les deux types d'analyse des systèmes linéaires

Type d'analyse	Signaux d'entrée	Lois/outils permettant l'analyse	Équation mathématique décrivant le système	Représentation graphique du comportement
Analyse temporelle	Échelon de tension	Lois des nœuds, des mailles. Relation entre $u$ et $i$ pour chaque dipôle	Équation différentielle linéaire	Représentation temporelle de $s(t)$ en réponse $e(t)$
Analyse fréquentielle	Signaux sinusoïdaux	Ponts diviseur, impédance complexe $\underline{Z}$	Fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$	Diagramme de Bode

# Circuit RC série: Réponse indicielle (1)

- On définit la constante de temps  $\tau$  du circuit  $RC$  par le produit :

$$\tau = RC$$

où  $\tau$  (s) ;  $R$  ( $\Omega$ ) ;  $C$  (F).

- La tension  $U_C$  aux bornes du condensateur d'un circuit  $RC$  série soumis à l'échelon de tension  $E$  a pour expression :

$$U_C = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

- L'intensité  $i$  du courant est :

$$i = C \frac{dU_C}{dt} \Rightarrow i = \frac{CE}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

# Circuit RC série: Réponse indicielle (2)

- Dans le cas où le condensateur est chargé sous une tension  $U_0$  pour  $t < 0$ , La tension  $U_C$  aux bornes du condensateur d'un circuit RC série soumis à l'échelon de tension  $E$  a pour expression :

$$U_C = \begin{cases} U_0 & \text{pour } t < 0 \\ E + (U_0 - E)e^{-\frac{t}{\tau}} & \text{pour } t > 0 \end{cases}$$

- L'intensité  $i$  du courant est :

$$i = C \frac{dU_C}{dt} \Rightarrow i = \frac{C(E - U_0)}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{(E - U_0)}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

# Circuit RC série: Réponse indicielle (3)

## □ Temps de réponse à 5%

On appelle temps de réponse à  $x\%$ , le temps au bout duquel  $s(t)$  parvient à la valeur  $E$  à  $x\%$  près de la différence de  $E$ . **Le temps de réponse à 5% est le plus utilisé.**

Ce qui se traduit par

$$U_C = E \left( 1 - e^{-\frac{t_{r5\%}}{\tau}} \right) = E - 0,05E \implies e^{-\frac{t_{r5\%}}{\tau}} = 0,05$$

$$t_{r5\%} = 3\tau$$

*On montre de la même manière que le temps de réponse à 1% est atteint au bout de  $4,6\tau$ . A  $t = 5\tau$ , le système se trouve donc à moins de 1% de son régime permanent.*



# Circuit RC série: Réponse indicielle (4)

## □ Temps de montée

Le temps de montée est le temps qui s'écoule entre 10% et 90% de la variation du signal.

Soient  $t_1$  et  $t_2$  les instants où la réponse vaut respectivement 10% et 90% de sa valeur finale

Ce qui se traduit par

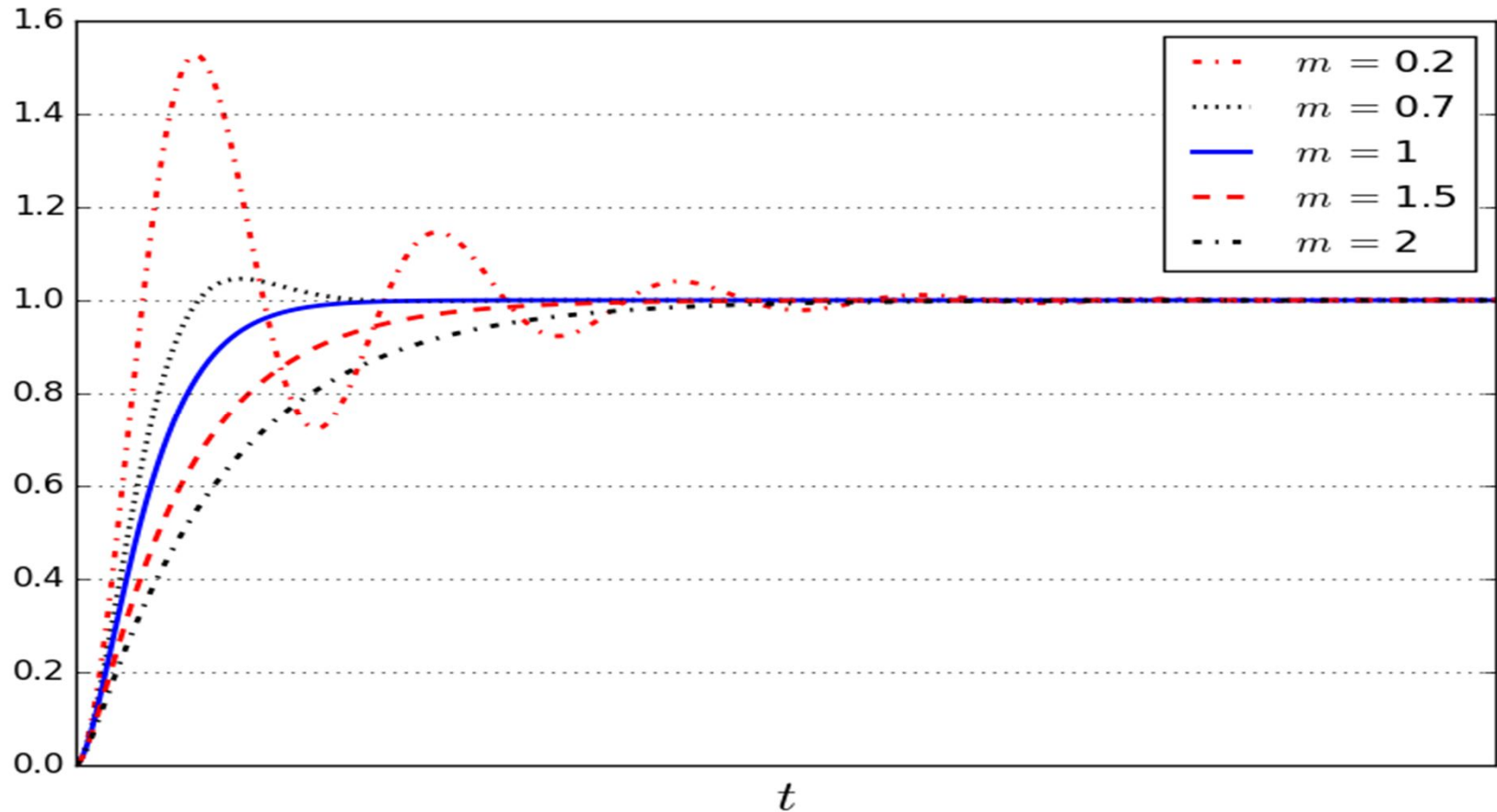
$$U_C = E \left( 1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}} \right) = 0,1E \Rightarrow t_1 = -\tau \ln 0,9$$

$$U_C = E \left( 1 - e^{-\frac{t_2}{\tau}} \right) = 0,9E \Rightarrow t_2 = -\tau \ln 0,1$$

$$\Rightarrow t_m = t_2 - t_1 = \tau \ln 9 \Rightarrow \boxed{t_m = 2,2\tau}$$

# Circuit RLC série: Réponse indicielle (1)

## □ Réponse indicielle d'un système du 2ème ordre



# Circuit RLC série: Réponse indicielle (2)

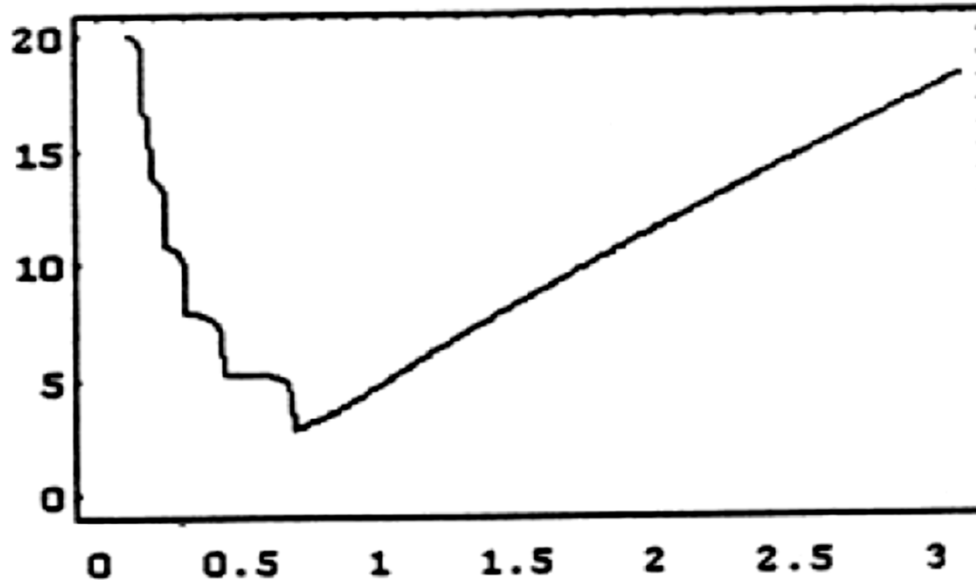
## □ Exploitation

- Valeur finale :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = E \lim_{p \rightarrow 0} H(p) = E.$
- Valeur initiale :  $\lim_{t \rightarrow 0^+} s(t) = E \lim_{p \rightarrow +\infty} H(p) = 0.$
- **Temps de réponse :**

Contrairement au système du 1<sup>er</sup> ordre il n'existe pas d'expression analytique reliant le temps de réponse aux paramètres caractéristiques  $m$  et  $\omega_0$  du système. On peut cependant calculer numériquement la quantité  $\omega_0 t_r$  en fonction de  $m$ . La courbe ci-dessous donne  $\omega_0 t_r$  en fonction de  $m$  pour 5% de la valeur finale :

# Circuit RLC série: Réponse indicielle (3)

*Temps de réponse des systèmes du 2<sup>ème</sup> ordre*



Ainsi pour une pulsation propre donnée, on peut choisir le coefficient d'amortissement  $m$  qui optimise la rapidité d'un filtre du 2<sup>ème</sup> ordre. Le résultat pour 5% est  $m \approx 0,70$ .

# Stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2 (1)

---

## □ Définition

Il existe plusieurs définitions de la stabilité d'un système. Nous utiliserons la suivante :

**Un système est stable si le signal de sortie  $s$  tend vers 0 lorsque le signal d'entrée  $e$  est nul (cas du régime libre).**

Autrement dit, un système est stable si sa réponse libre tend vers zéro lorsque  $t$  tend vers l'infini.

# Stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2 (2)

## □ Étude à partir de l'équation différentielle

On peut traduire la définition sur l'équation différentielle correspondante :

$$a_0 s + a_1 \frac{ds}{dt} + a_2 \frac{d^2 s}{dt^2} = b_0 e + b_1 \frac{de}{dt} + b_2 \frac{d^2 e}{dt^2} \stackrel{e=0}{=} 0$$

On cherche donc la limite pour  $t \rightarrow +\infty$  de  $s_H(t)$  solution de l'équation différentielle :  $a_0 s + a_1 \dot{s} + a_2 \ddot{s} = 0$

Il s'agit de l'équation homogène associée à l'équation différentielle de départ. Sa solution correspond au régime libre : **Le système est stable si  $\lim_{t \rightarrow +\infty} s_H(t) = 0$ .**

# Stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2 (3)

- **Système d'ordre 1 :**

On a alors  $a_0s + a_1\dot{s} = 0$  soit  $s(t) = \lambda \exp\left(-\frac{a_0}{a_1}t\right)$ .  $s(t)$  tend vers 0 si et seulement si  **$a_0$  et  $a_1$  sont du même signe.**

- **Système d'ordre 2 :**

On a alors  $a_0s + a_1\dot{s} + a_2\ddot{s} = 0$ . Il existe 3 types de solutions (régime apériodique, critique ou pseudo-périodique) selon le signe du discriminant de l'équation caractéristique  $a_0 + a_1r + a_2r^2 = 0$ .

Dans tous les cas, les termes en exponentiel doivent tendre vers 0 pour qu'il y ait stabilité. Mathématiquement cela se traduit par le fait que la partie réelle des 2 solutions de l'équation caractéristique doit être négative. On admettra que l'on peut vérifier que c'est le cas si et seulement si  **$a_0, a_1$  et  $a_2$  sont du même signe.**

# Stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2 (4)

---

## Exemple

On considère un quadripôle pour lequel l'équation différentielle reliant l'entrée et la sortie est donnée par :

$$\ddot{s} + \omega_0(5 - k)\dot{s} + \omega_0^2 s = \omega_0 k \dot{e}$$

L'équation homogène associée est :

$$\ddot{s} + \omega_0(5 - k)\dot{s} + \omega_0^2 s = 0$$

Ce « système » est stable si  $5 - k > 0 \Leftrightarrow k < 5$ .



# Stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2 (5)

## □ Étude à partir de la fonction de transfert

Deux conditions nécessaires pour la stabilité, peuvent être exprimées à partir de la forme du **dénominateur** de la fonction de transfert. Les coefficients du polynôme doivent être :

- tous présents,
- tous de même signe.

Ces conditions seront « suffisantes » pour les systèmes électroniques étudiés en physique (qu'ils soient du 1<sup>er</sup> ou du 2<sup>ème</sup> ordre).

Ainsi pour une fonction de transfert de la forme :

$$H(p) = \frac{b_0 + b_1p + b_2p^2}{a_0 + a_1p + a_2p^2}$$

le système est stable si  **$a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  sont du même signe.**

# Stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2 (6)

---

## Remarques

Dans le cas d'un circuit ne contenant que des éléments passifs, le système est nécessairement stable. Il faut donc utiliser au moins un composant actif comme un ALI pour apporter de l'énergie et déstabiliser le système.

---

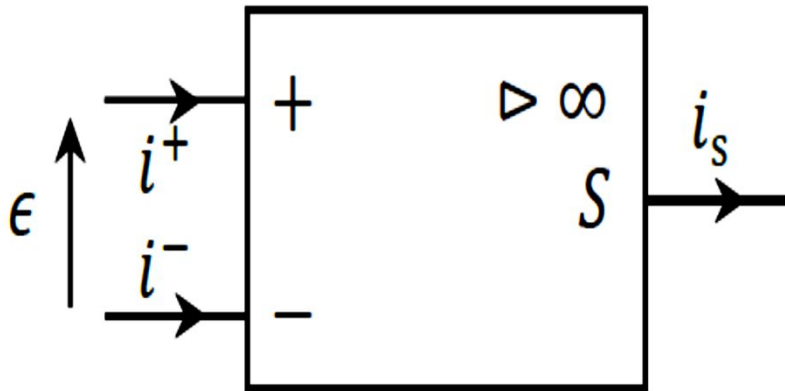
# Montage à base d'ALI idéal en régime linéaire

# Modèle de l'ALI idéal

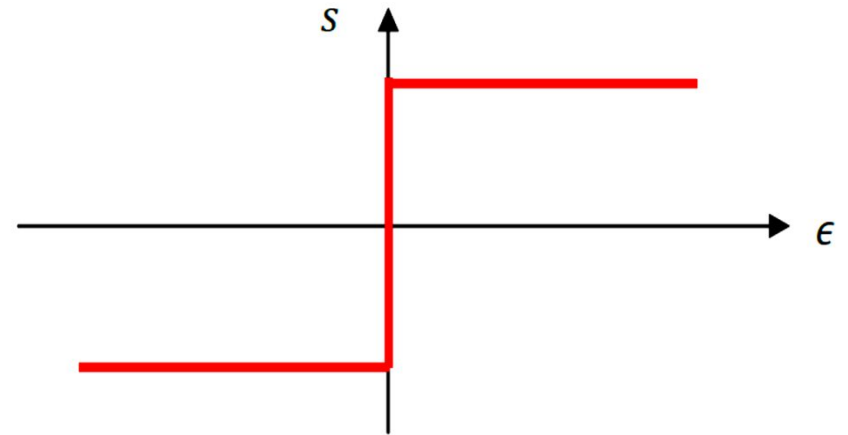
En régime linéaire, l'ALI idéal est tel que  $\epsilon = 0$ .

En régime saturé (non-linéaire) un ALI idéal est tel que :

- si  $\epsilon > 0$ ,  $s = +V_{\text{sat}}$ ,
- si  $\epsilon < 0$ ,  $s = -V_{\text{sat}}$ .



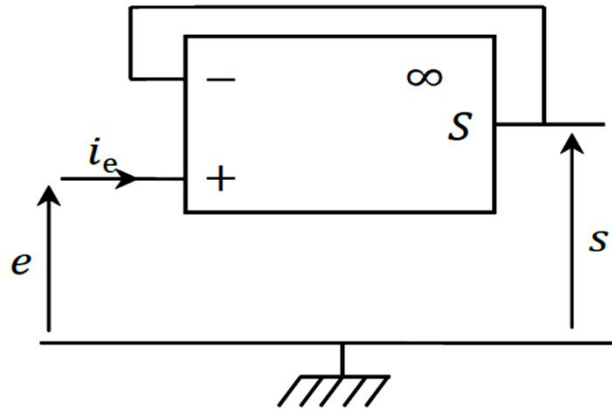
Symbole de l'ALI idéal



Caractéristique de transfert d'un ALI idéal

# Montage suiveur (1)

## a. Montage et comportement



Montage suiveur

L'ALI étant supposé idéal et la présence d'une unique rétroaction sur l'entrée inverseuse permet un fonctionnement linéaire pour lequel  $\epsilon = 0$  soit :

$$v^+ = v^-$$

On obtient ici  $e = s$  :

- la tension de sortie « suit » celle d'entrée,
- le gain est de 1 pour ce montage.

# Montage suiveur (2)

La résistance d'entrée du suiveur est  $R_e = \frac{e}{i_e}$  avec  $i_e = i^+ = 0$  ce qui donne **une résistance d'entrée infinie**. De même  $s$  est indépendant du courant de sortie et d'une impédance éventuelle placée en sortie. On en déduit que **la résistance de sortie est nulle**.

Si on prend le modèle de l'ALI linéaire du premier ordre, alors on obtient une fonction de transfert de la forme

$$H(p) = \frac{H_{\max}}{1 + \frac{p}{\omega_c}} \text{ avec } H_{\max} = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0} \approx 1 \text{ et}$$

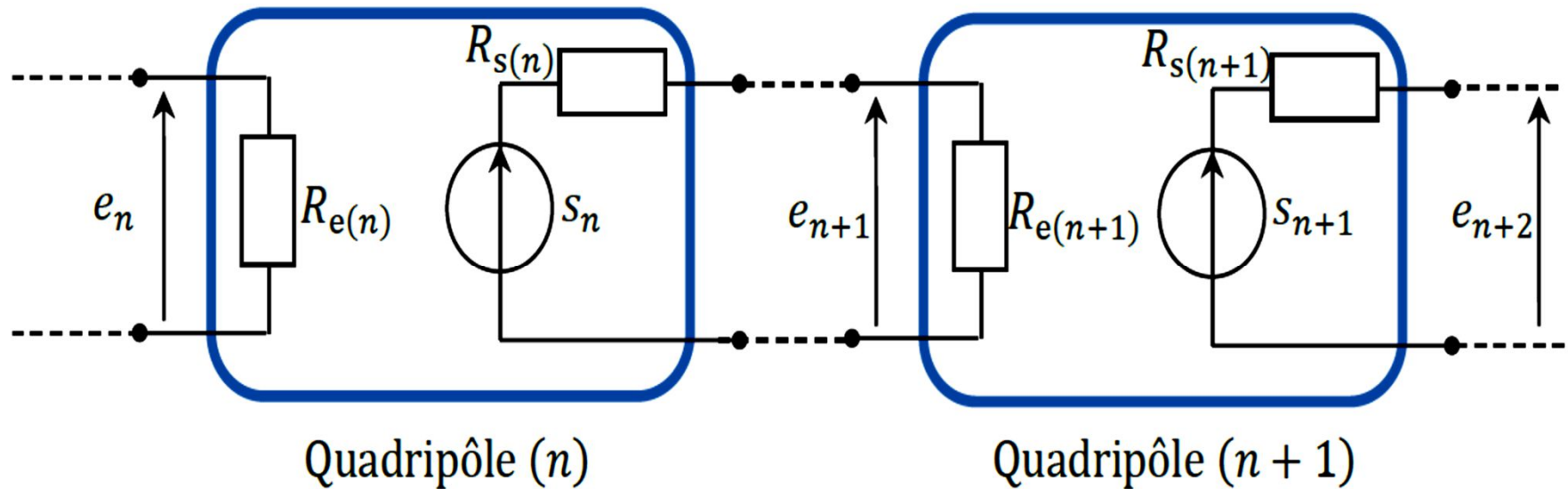
$$\omega_c = (1 + \mu_0)\omega_0 \approx 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

# Montage suiveur (3)

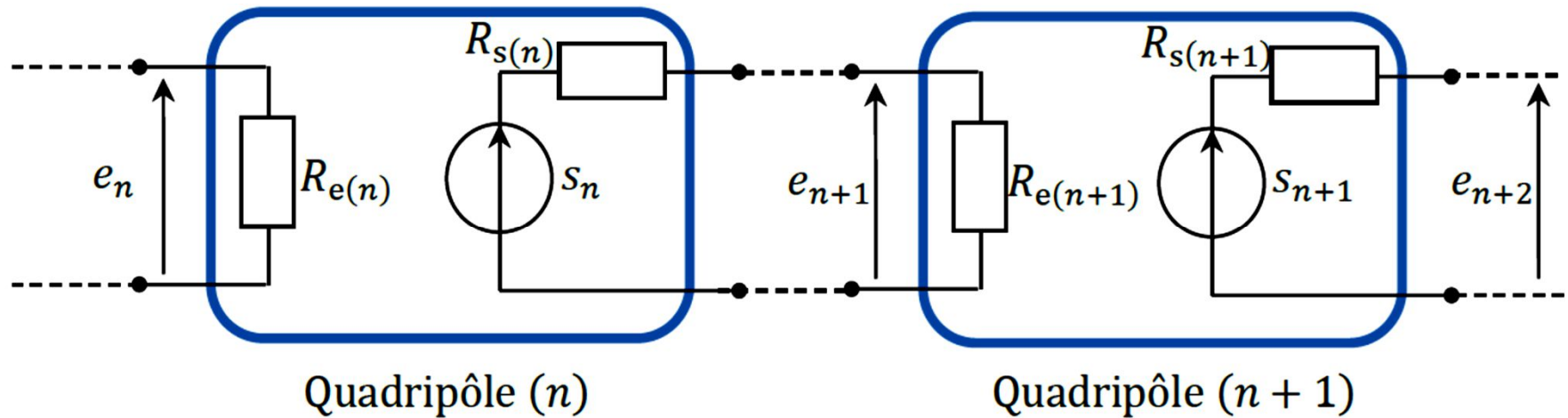
## b. Intérêt du montage suiveur

### □ Adaptation d'impédance dans l'association en cascade de quadripôles linéaires

On s'intéresse à l'association de plusieurs quadripôles « en cascade » comme schématisé ci-dessous :



# Montage suiveur (4)



Quadripôle (n)

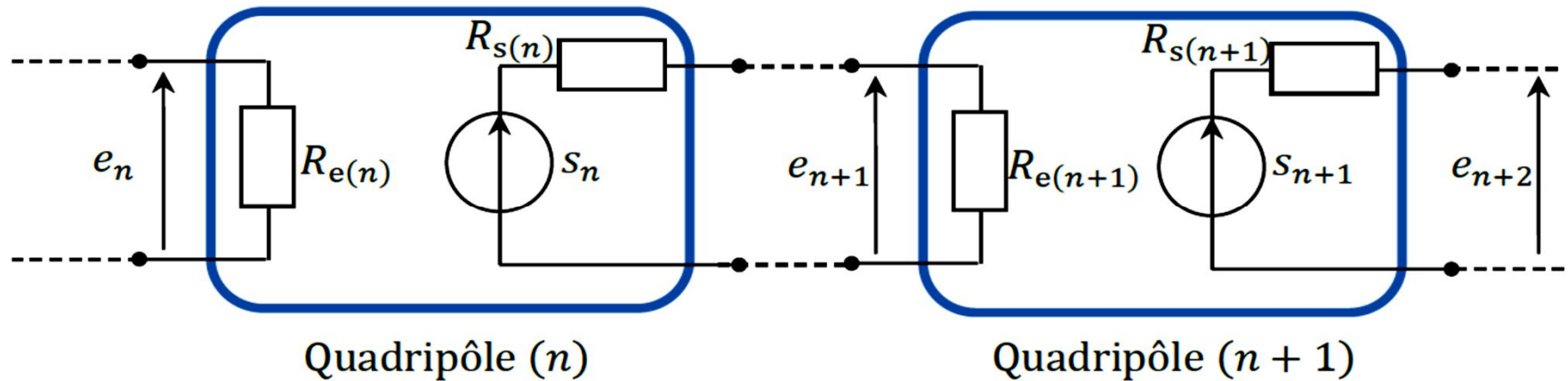
Quadripôle (n + 1)

Chaque quadripôle ( $n$ ) est modélisé par une résistance d'entrée  $R_{e(n)}$  et un générateur de Thévenin en sortie de f.e.m.  $S_n$  et de résistance de sortie  $R_{s(n)}$ . Le quadripôle ( $n$ ) quand il est seul ne débite pas de courant en sortie ( $i_{s,n} = 0$ ) et on a  $H_n = \frac{S_n}{e_n}$ . On a alors :

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= S_n - R_{s(n)} \times i_{s,n} = S_n = H_n e_n \\ &= R_{e(n+1)} \times i_{s,n} \end{aligned}$$



# Montage suiveur (5)



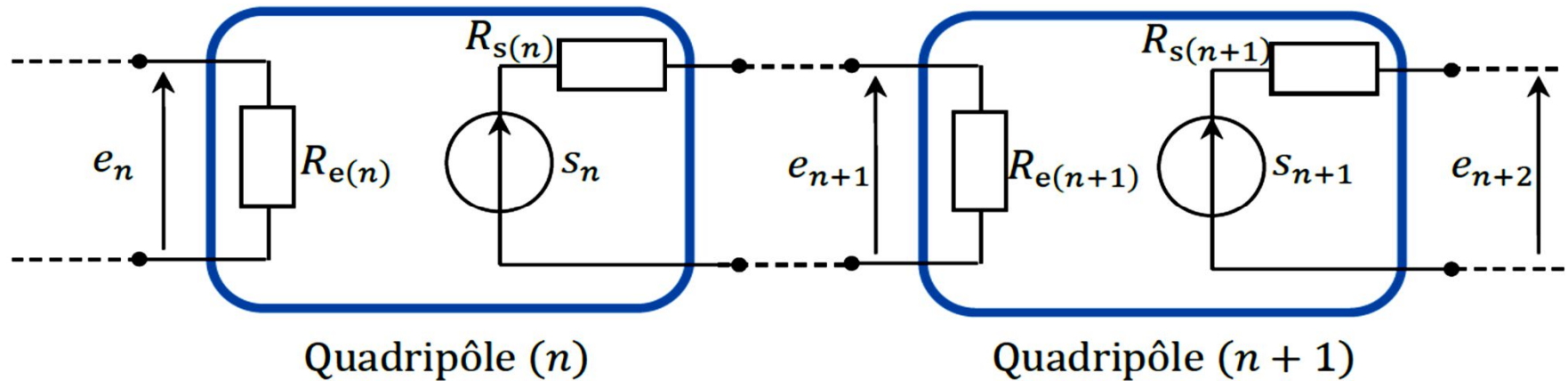
Le quadripôle ( $n$ ) quand il est associé en cascade avec le quadripôle ( $n + 1$ ) a une fonction de transfert  $H'_n = \frac{e_{n+1}}{e_n}$  avec *a priori*

$$e_{n+1} = s_n - R_{s(n)} \times i_{s,n} = R_{e(n+1)} \times i_{s,n} \neq s_n :$$

La fonction de transfert est donc modifiée par l'ajout de quadripôles en cascade. Pour avoir  $e_{n+1} = s_n$  il faut :

- soit  $R_{s(n)} = 0$ ,

# Montage suiveur (6)



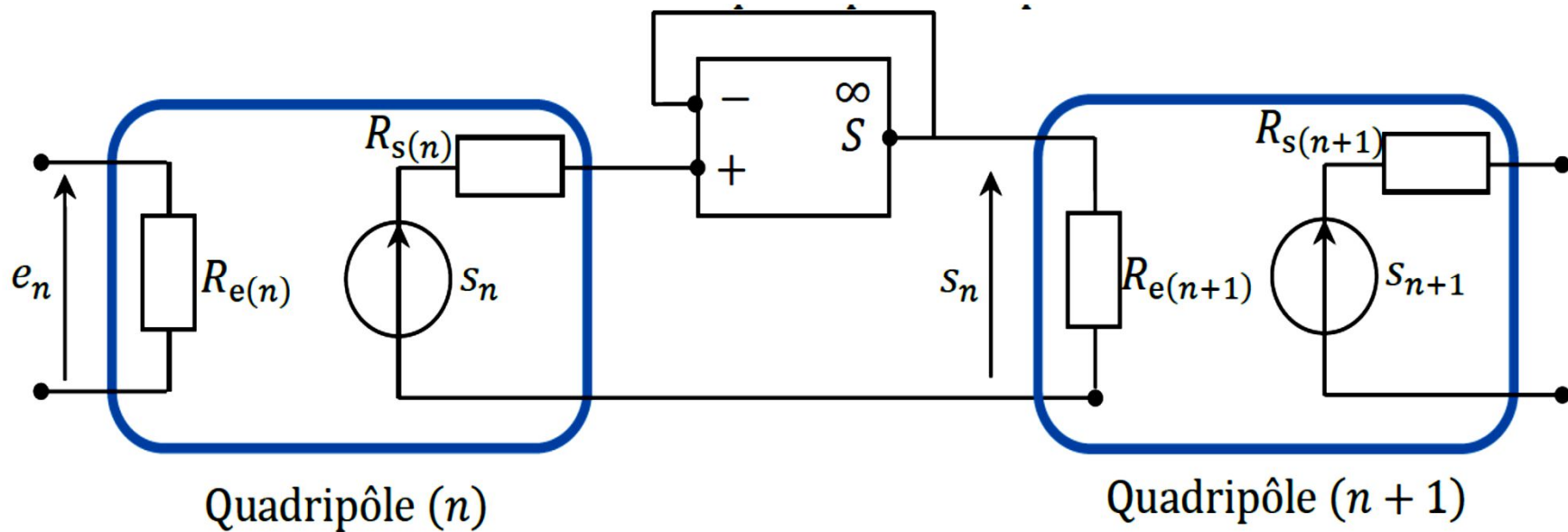
- soit ne pas faire circuler de courant dans  $R_{s(n)}$  donc avoir  $R_{e(n+1)} \rightarrow \infty$ .

Une grande impédance d'entrée ou une petite impédance de sortie  $R_{e(n+1)} \gg R_{s(n)}$  permet l'association en cascade de quadripôle sans perturber les fonctions de transfert.

*C'est le cas de nombreux montages à base d'ALI*

# Montage suiveur (7)

Le montage suiveur permet justement par son impédance d'entrée très grande d'être relié en amont à un quadripôle dont l'impédance de sortie n'est pas nulle et par son impédance de sortie nulle d'être relié en aval à un quadripôle d'impédance d'entrée non infinie.



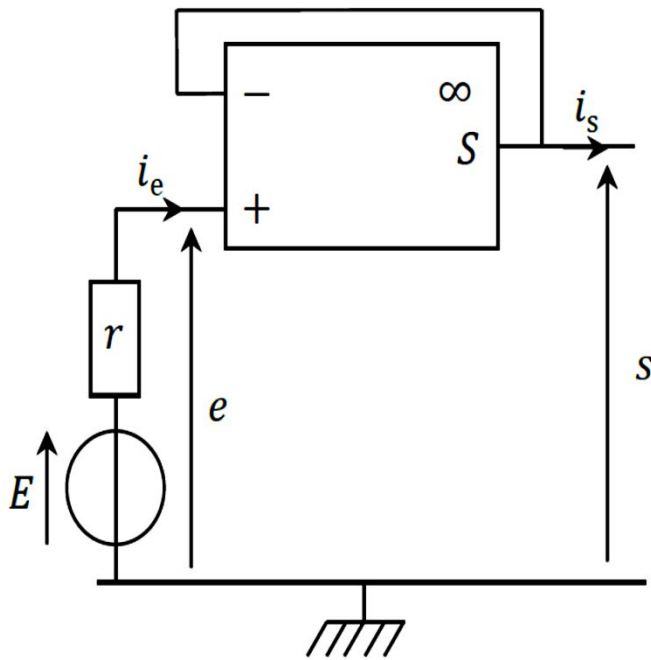
**Grâce au montage suiveur :**

- vue du quadripôle ( $n$ ), la résistance d'entrée du quadripôle qui suit est infinie,
- vue du quadripôle ( $n+1$ ), la résistance de sortie du quadripôle précédent est nulle.

# Montage suiveur (8)

## □ Rendre idéale une source de tension

Le montage suiveur permet également de rendre « idéale » une source de tension  $(E; r)$  possédant une résistance interne  $r$  non nulle :



Ci-dessus  $e = E - r i_e$  avec  $i_e = i^+ = 0$  ce qui donne  $s = e = E$  : vu de la sortie, le montage se comporte comme une source idéale de tension de f.e.m.  $E$ . À noter encore que dans cette configuration la source de tension  $(E; r)$  ne débite aucun courant donc aucune puissance. C'est l'ALI qui délivre la puissance au dipôle branché en sortie.

---

# Montages à base d'ALI idéal en régime saturé

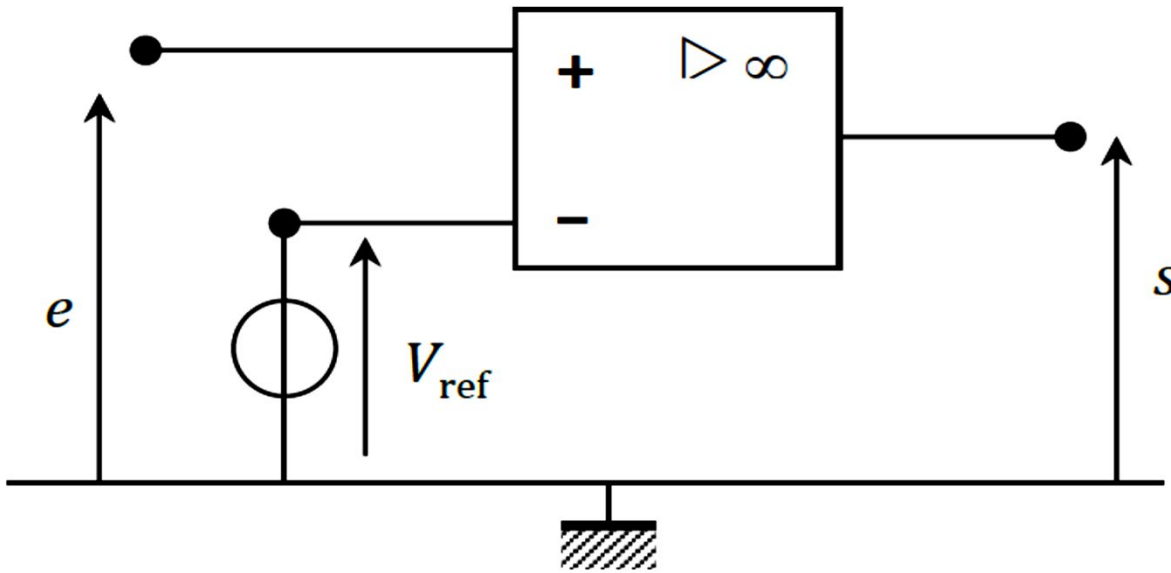
# Introduction

---

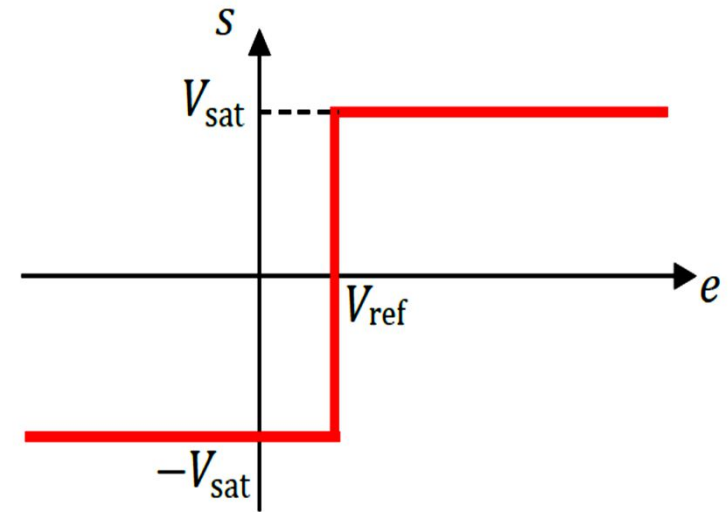
L'absence de toute rétroaction ou la présence d'une unique rétroaction « positive » aboutit à un système instable pour lequel la tension de sortie  $s$  tend vers  $\pm V_{\text{sat}}$  presque instantanément. On a alors deux situations possibles :

- si  $v^+ > v^-$  alors  $s = +V_{\text{sat}}$  ;
- si  $v^- > v^+$  alors  $s = -V_{\text{sat}}$  .

# Comparateur simple (1)



Comparateur non inverseur



Caractéristique du comparateur non inverseur

Dans le cadre du modèle idéal, on a :

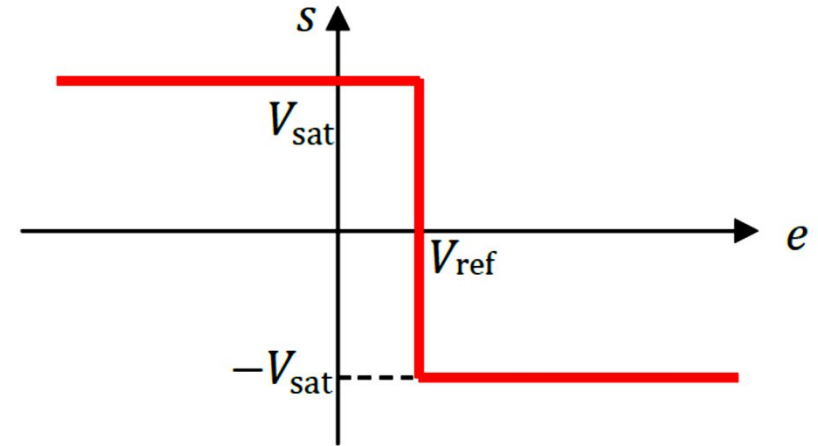
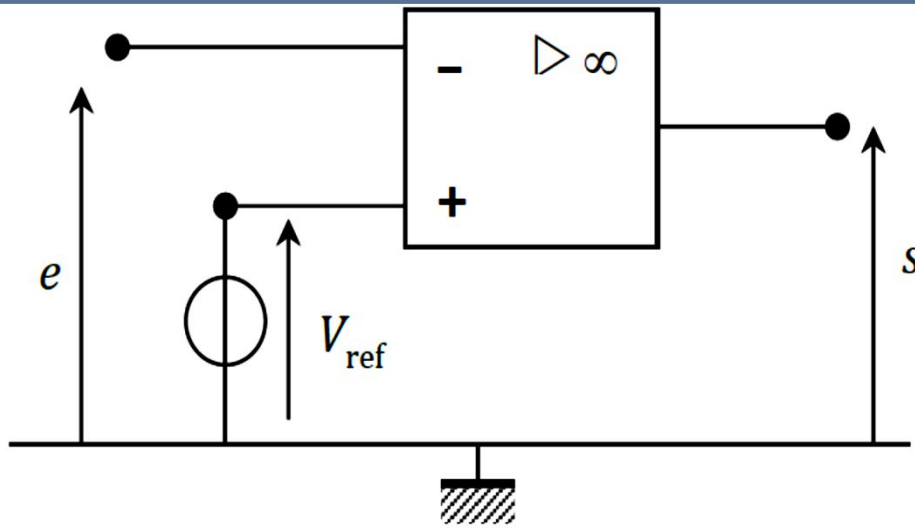
- si  $e > V_{\text{ref}}$  alors  $s = +V_{\text{sat}}$  ;
- si  $e < V_{\text{ref}}$  alors  $s = -V_{\text{sat}}$

## Remarques

Lorsque  $V_{\text{ref}} = 0$ , le signe de  $s$  permet de savoir si  $e > 0$  ou  $e < 0$ .

D'une manière générale, le point de fonctionnement se trouve essentiellement dans les 2 quadrants où  $s$  et  $e$  sont du même signe. On parle donc de comparateur « non inverseur ».

# Comparateur simple (2)



**Comparateur inverseur**

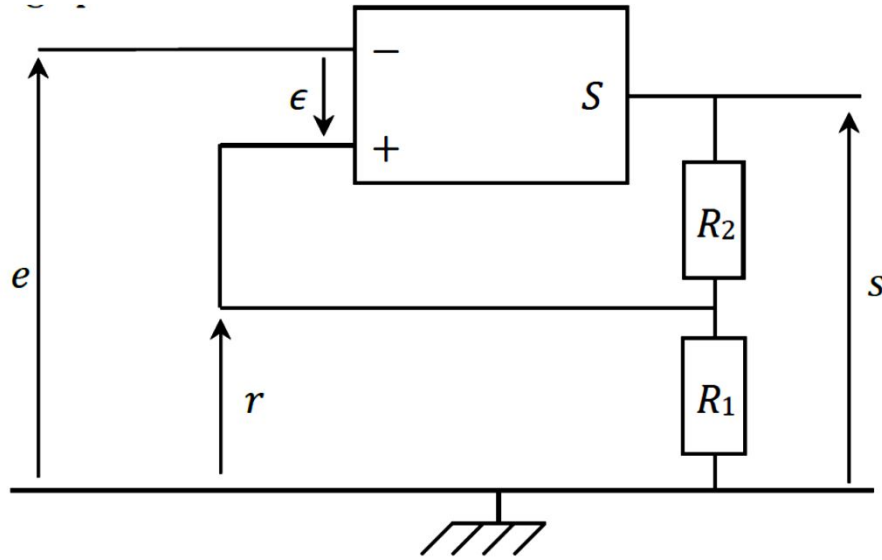
**Caractéristique du comparateur inverseur**

Dans le cadre du modèle idéal, on a :

- si  $e < V_{\text{ref}}$  alors  $s = +V_{\text{sat}}$  ;
- si  $e > V_{\text{ref}}$  alors  $s = -V_{\text{sat}}$



# Comparateur à hystérésis inverseur (1)



$$\epsilon = r - e$$

On a (le courant  $i^+$  étant négligeable)

$$r = \frac{R_1}{R_1 + R_2} s \stackrel{\text{def}}{=} Bs$$

## Comparateur à hystérésis inverseur

### □ Établissement de la caractéristique de transfert $s = f(e)$

La relation entre  $s$  et  $e$  ne peut pas s'exprimer par une expression mathématique. Notamment,  $e$  et  $s$  ne sont pas reliés par une équation différentielle linéaire. On peut par contre établir « **pas à pas** » la relation entre  $s$  et  $e$  que l'on représentera graphiquement.

# Comparateur à hystérésis inverseur (2)

- Quand  $s = +V_{\text{sat}}$

$$r = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}} = V_B$$

Il faut que  $e > V_B$  pour obtenir le basculement de  $+V_{\text{sat}}$  à  $-V_{\text{sat}}$ .

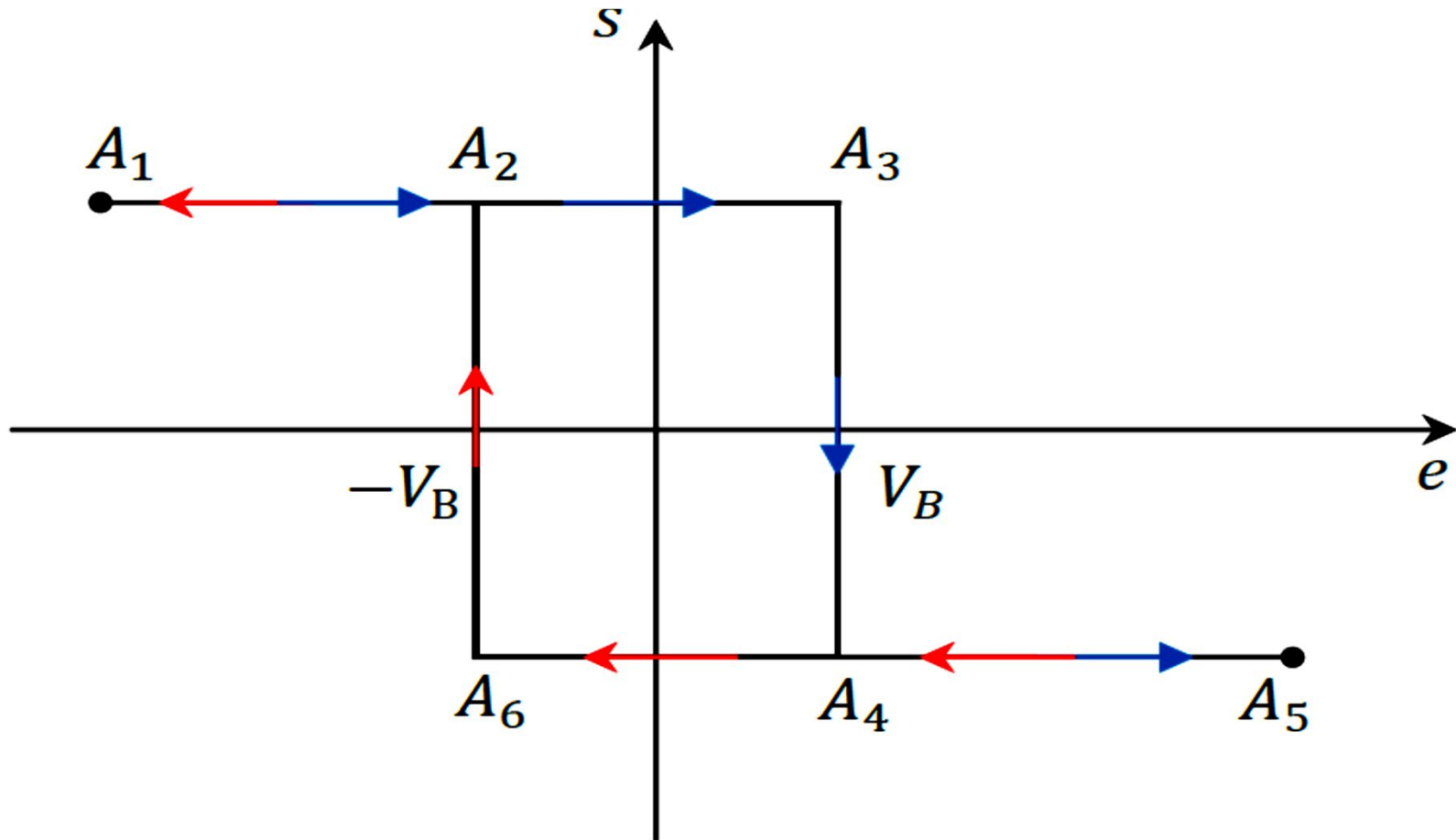
- Quand  $s = -V_{\text{sat}}$

$$r = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}} = -V_B$$

Il faut que  $e < -V_B$  pour obtenir le basculement de  $-V_{\text{sat}}$  à  $+V_{\text{sat}}$ .

On obtient le graphique ci-dessous que l'on appelle souvent « cycle d'hystérésis » :

# Comparateur à hystérésis inverseur (3)



Caractéristique  $s = f(e)$  du comparateur inverseur à hystérésis

# Comparteur à hystérésis inverseur (4)

Le terme hystérésis vient du grec ancien ὑστέρησι (« husterein » signifiant « être en retard ») et doit se comprendre par le fait que le basculement de la tension  $s$  s'effectue lors de l'augmentation de  $e$  avec un seuil supérieur à celui pour lequel le basculement précédent avait eu lieu : le basculement a donc lieu « avec retard » par rapport au précédent. On a le même retard lors que la tension  $e$  diminue : il faut aller « plus loin » dans la diminution de  $e$  pour que le basculement ait à nouveau lieu.

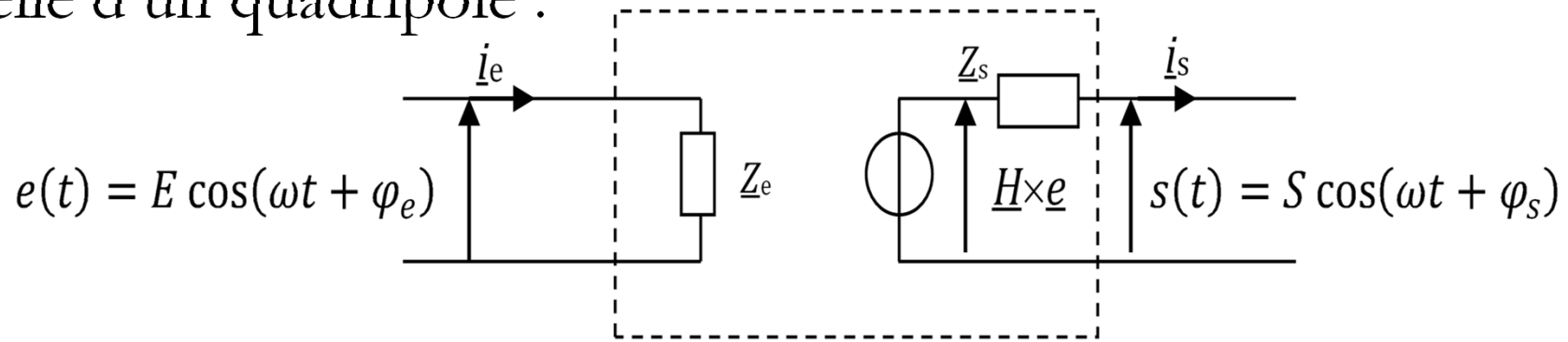
On constate dans le dispositif précédent que pour une valeur d'entrée nulle ( $e = 0$ ), deux valeurs de sortie sont possibles selon l'évolution précédente du signal d'entrée. Le dispositif reste figé dans un état tant que la tension  $e$  reste entre  $-V_B$  et  $+V_B$  : il conserve donc une **mémoire de ses états antérieurs**. **On parle, pour cette raison, de fonction mémoire.**

---

# Modélisation usuelle de l'ALI réelle

# Notions de résistances d'entrée et de sortie d'un quadripôle (1)

En électrocinétique, on étudie souvent des circuits dont la structure est celle d'un quadripôle :



La résistance d'entrée d'un quadripôle (pour une entrée en convention récepteur) est définie par :

- $R_e = \frac{e}{i_e}$  en régime continu ou en régime variable quelconque ;
- $\underline{Z}_e = \frac{\underline{e}}{\underline{i_e}}$  en régime sinusoïdal permanent (on parle d'impédance d'entrée dans ce cas).

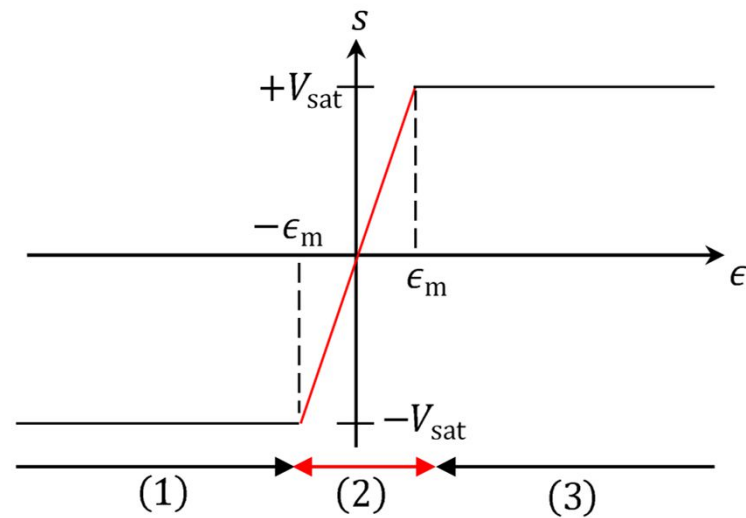
# Notions de résistances d'entrée et de sortie d'un quadripôle (2)

---

La résistance de sortie est définie par la résistance du schéma de Thévenin équivalent : si la sortie est orientée en convention générateur on a :

- en régime continu ou en régime variable quelconque,  $R_S$  est définie par  $s = He - R_S i_S$ .
- en régime sinusoïdal permanent,  $\underline{Z}_S$  est définie par  $\underline{s} = \underline{H} \cdot \underline{e} - \underline{Z}_S \cdot \underline{i}_S$ .

# Comportement en régime continu : caractéristique de transfert (1)



Ce graphique fait apparaître deux modes de fonctionnement : linéaire et saturé (= non-linéaire).  
– Les zones (1) et (3) correspondent au mode saturé ; les tensions de saturation seront considérées comme égales en valeur absolue et de l'ordre de la tension d'alimentation  $V_{CC}$  qui sera prise égale à  $\pm 15$  V (et parfois  $\pm 5$  V).

- La zone (2) correspond au régime linéaire où  $s = \mu_0 \epsilon$ .
- Le régime est donc linéaire tant que  $|\epsilon| \leq \frac{V_{sat}}{\mu_0}$  soit avec  $V_{sat} \approx 15$  V,  $\epsilon_m \approx 0,15$  mV. Le régime linéaire n'est donc possible que pour des valeurs très faibles de  $\epsilon$ . On verra que le fait de relier la sortie à l'entrée inverseuse  $E^-$  (par un fil ou par l'intermédiaire d'un dipôle linéaire) permet le fonctionnement en régime linéaire.



# Comportement en régime continu : caractéristique de transfert (2)

	$\mu\text{A 741C}$	TL 081C
Gain statique en tension ( $\mu_0$ )	200000	200000
Courant d'entrée	80 nA	30 pA
Résistance d'entrée	$2 \cdot 10^6 \Omega$	$10^{12} \Omega$
Vitesse de réponse (Slew rate)	$0,5 \text{ V} \cdot \mu\text{s}^{-1}$	$13 \text{ V} \cdot \mu\text{s}^{-1}$

**Grandeurs caractéristiques de deux types d'ALI**

# Saturation en vitesse de réponse du fonctionnement linéaire (1)

---

Un ALI comme tout composant ne possède pas un temps de réponse nulle à une excitation donnée. On appelle « vitesse de balayage » (slew-rate en anglais) le taux maximum de variation de la tension de sortie par rapport au temps :

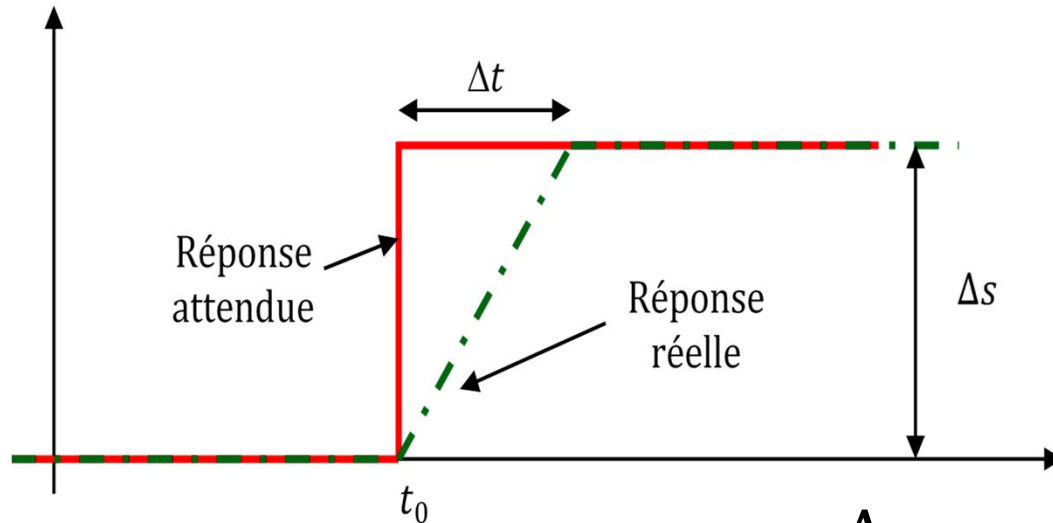
$$SR = \sigma = \left| \frac{ds}{dt} \right|_{\max}$$

Si à  $t_0$  on applique un échelon de tension (en entrée d'un montage suiveur par exemple), la tension de sortie n'atteindra pas instantanément sa valeur finale :

*NB: Cette vitesse de balayage n'a rien à voir avec celle de l'oscilloscope.*

---

# Saturation en vitesse de réponse du fonctionnement linéaire (2)



$$SR = \sigma = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

La vitesse de balayage est donc la pente maximale que peut reproduire un ALI en sortie  $\left| \frac{ds}{dt} \right| \leq \sigma$  avec  $\sigma$  de l'ordre de  $0,5 \text{ V} \cdot \mu\text{s}^{-1}$  pour un ALI 741. **Le SR est responsable de la « triangularisation » des signaux sinusoïdaux en haute fréquence.**

---

# Filters

# Gain en décibel



## Bon à retenir

- Un gain de 20 dB correspond à une amplification d'un facteur 10.
- Un gain de 40 dB correspond à une amplification d'un facteur 100.



## Bon à retenir

- Un gain de -20 dB correspond à une atténuation d'un facteur 10.
- Un gain de -40 dB correspond à une atténuation d'un facteur 100.



## Bon à retenir

- Un gain en décibel positif correspond à une amplification.
- Un gain en décibel négatif correspond à une atténuation.
- Un gain nul en décibel correspond à une non amplification non atténuation du signal.

# Exemple de tracé d'un diagramme de Bode (1)

---

On considère une fonction de transfert qui peut se mettre sous la forme d'un produit ou d'un rapport de fonctions de transfert d'ordre 1. On va montrer sur l'exemple suivant, une méthode de tracé du diagramme de Bode en sommant les courbes graphiquement.

On considère la fonction de transfert :

$$\underline{H} = H_0 \times \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_2}}$$

avec  $\omega_1 > \omega_2$  et  $H_0 > 1$ .

# Exemple de tracé d'un diagramme de Bode (2)

---

On pose alors :  $\underline{H}_1 = 1 + j \frac{\omega}{\omega_1}$  et  $\underline{H}_2 = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_2}}$ .

On a ici deux pulsations frontières, donc 3 domaines où il faut chercher des équivalents. Pour le tracé du diagramme de Bode, on prendra les valeurs numériques :

$$H_0 = 10 \text{ et } \frac{\omega_1}{\omega_2} = 10^3.$$

Le « log » transforme un produit en une somme :

$$\begin{aligned} G_{\text{dB}}(\omega) &= G_{\text{dB},0} + G_{\text{dB},1}(\omega) + G_{\text{dB},2}(\omega) \\ &= 20 \log H_0 + 20 \log H_1 + 20 \log H_2 \end{aligned}$$

# Exemple de tracé d'un diagramme de Bode (3)

---

## □ Diagramme du gain en dB :

On procède à l'étude asymptotique de chaque gain en dB :

$$\forall \omega : G_{\text{dB},0,\text{éq}} = 20 \log |H_0|$$

$$\omega \ll \omega_1 : G_{\text{dB},1,\text{éq}} \sim 0$$

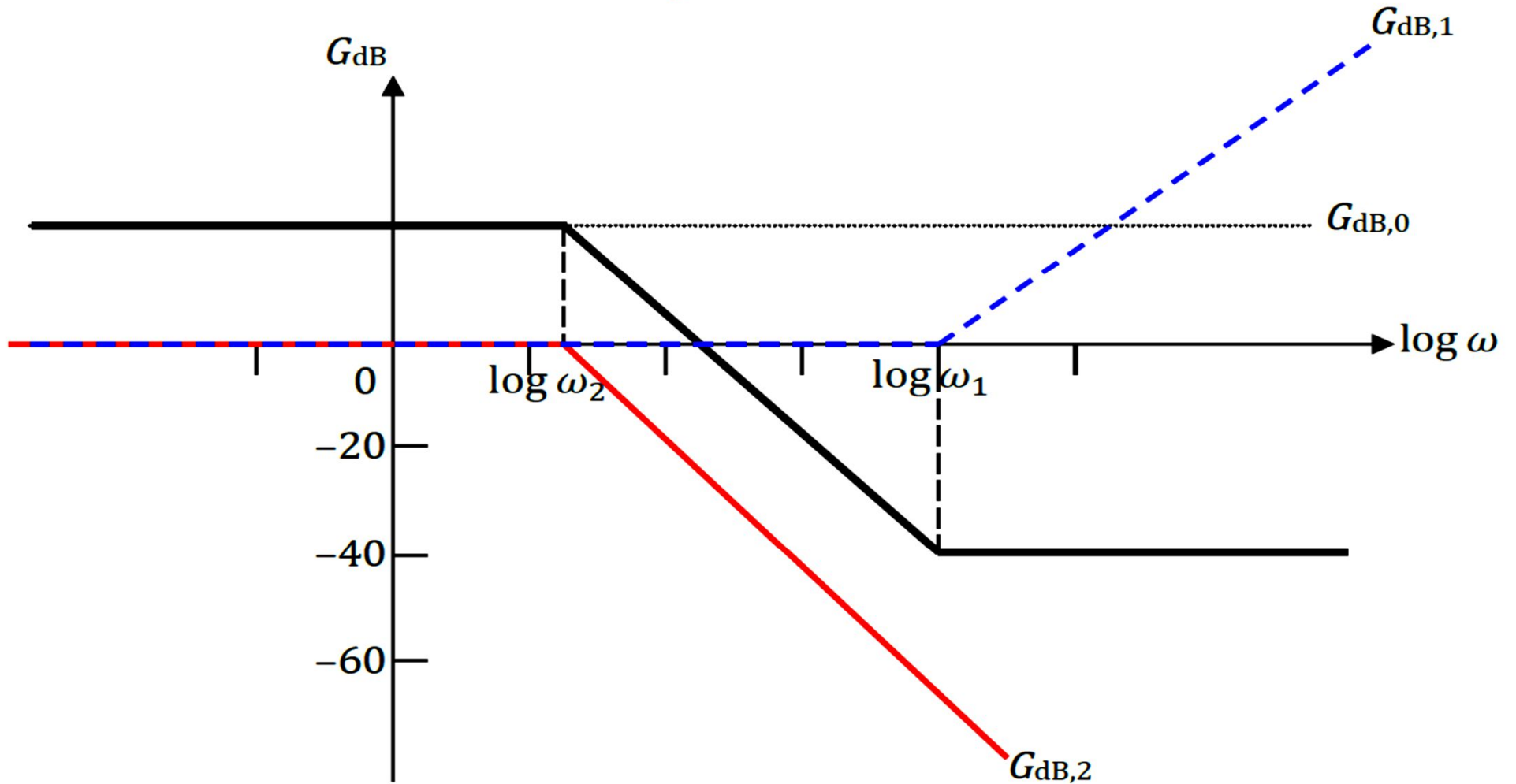
$$\omega \gg \omega_1 : G_{\text{dB},1,\text{éq}} \sim 20 \log \omega - 20 \log \omega_1$$

$$\omega \ll \omega_2 : G_{\text{dB},2,\text{éq}} \sim 0$$

$$\omega \gg \omega_2 : G_{\text{dB},2,\text{éq}} \sim -20 \log \omega + 20 \log \omega_2$$



# Exemple de tracé d'un diagramme de Bode (4)



# Exemple de tracé d'un diagramme de Bode (5)

## □ Diagramme de Bode de la phase

$$\begin{aligned}\varphi(\omega) &= \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 \\ &= \arg H_0 + \arg \left( 1 + j \frac{\omega}{\omega_1} \right) - \arg \left( 1 + j \frac{\omega}{\omega_2} \right) \\ &= 0 + \underbrace{\arctan \frac{\omega}{\omega_1}}_{\varphi_1} - \underbrace{\arctan \frac{\omega}{\omega_2}}_{\varphi_2}\end{aligned}$$

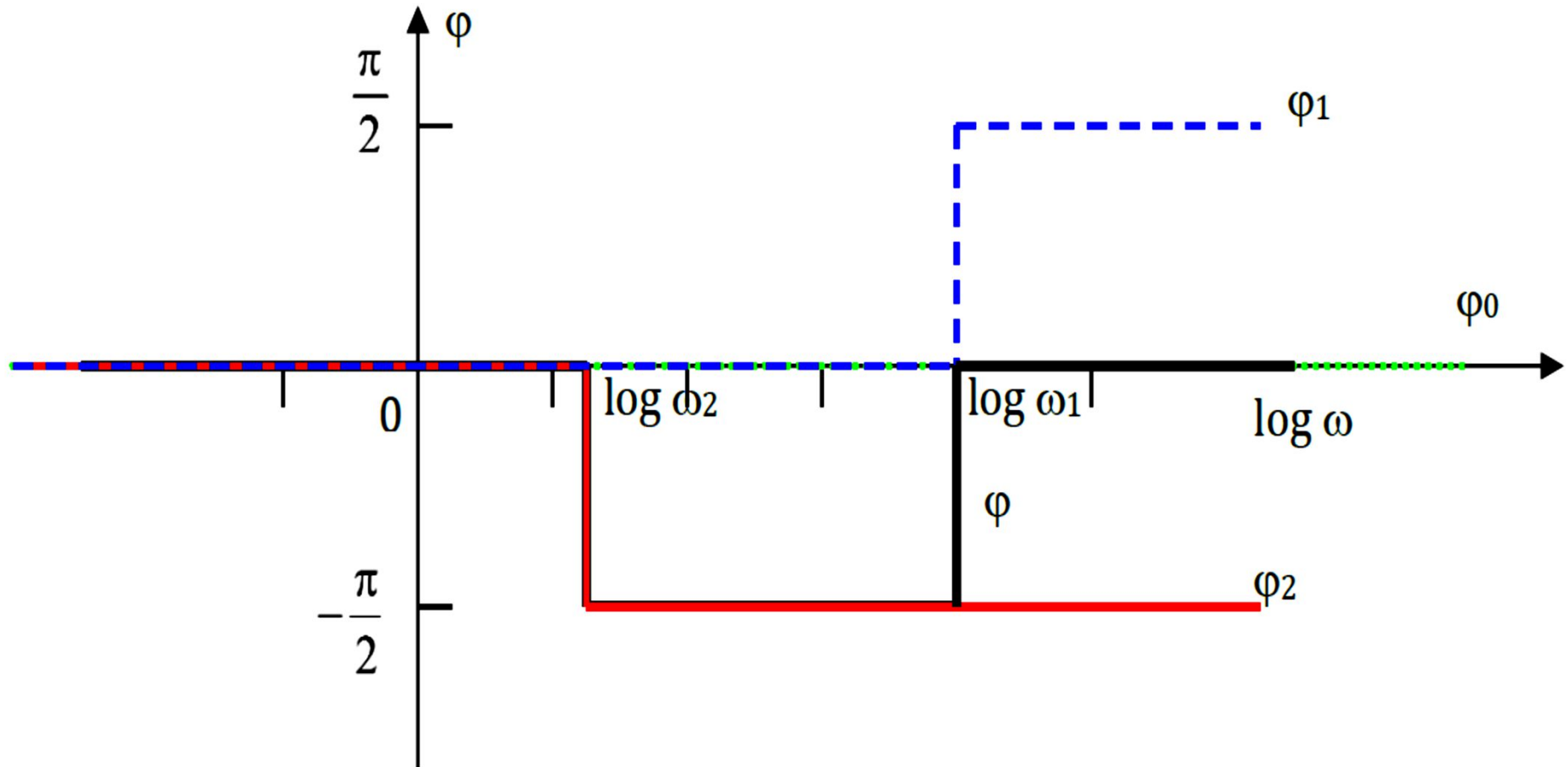
$$\omega \ll \omega_1 : \varphi_1(\omega) \sim 0$$

$$\omega \gg \omega_1 : \varphi_1(\omega) \sim \frac{\pi}{2}$$

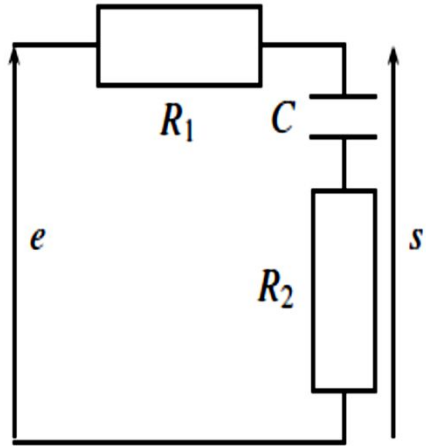
$$\omega \ll \omega_2 : \varphi_2(\omega) \sim 0$$

$$\omega \gg \omega_2 : \varphi_2(\omega) \sim -\frac{\pi}{2}$$

# Exemple de tracé d'un diagramme de Bode (6)



# Exemple de tracé d'un diagramme de Bode (7)



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{\frac{1}{jC\omega} + R_2}{R_2 + R_1 + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1 + jR_2C}{1 + j(R_2 + R_1)C\omega}$$

Figure 11.9 – Passe-bas du premier ordre.

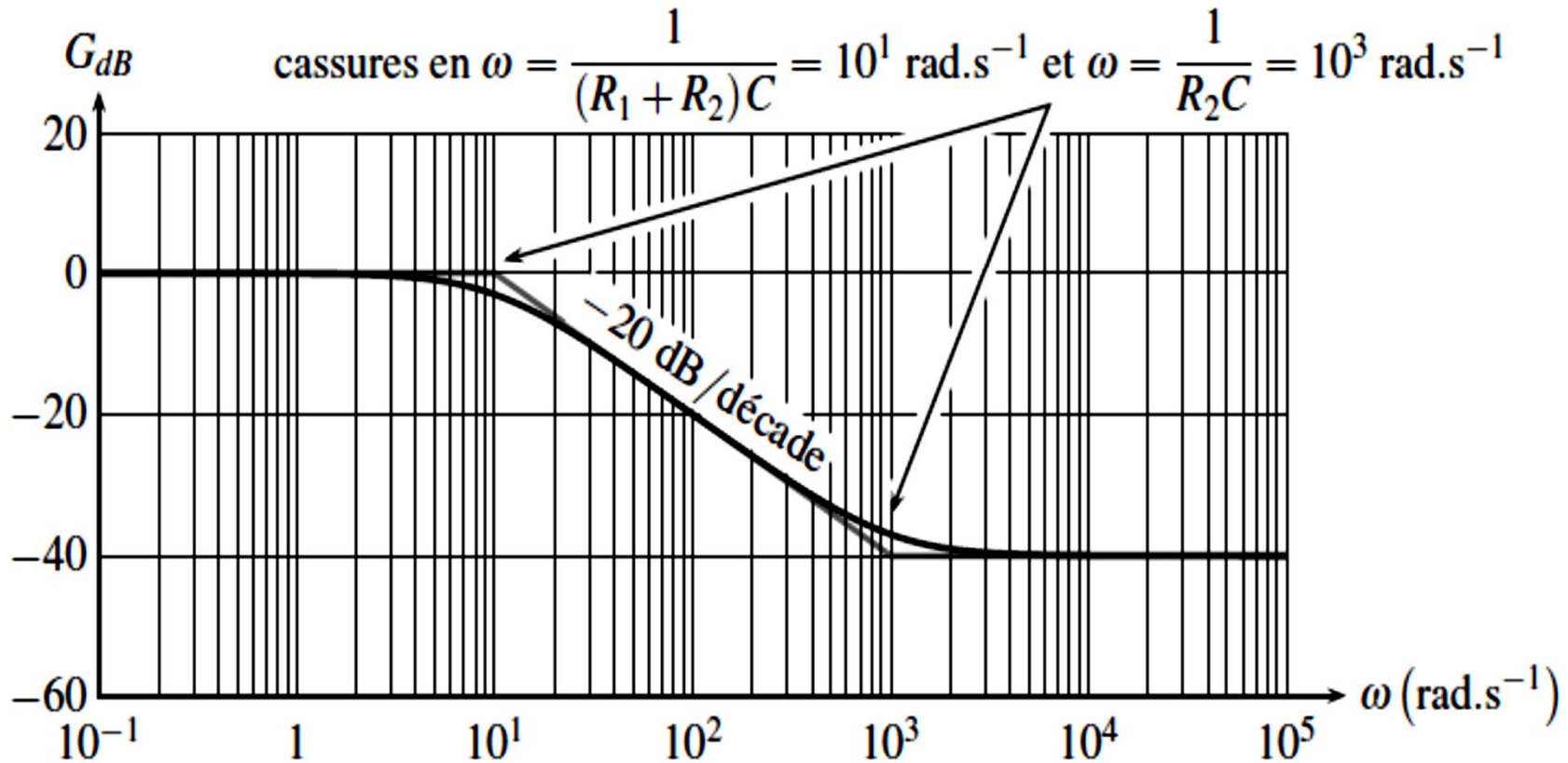
Ce système présente deux constantes de temps,  $\tau_n = R_2C$  au numérateur et  $\tau_d = (R_2 + R_1)C\omega$  au dénominateur.

Le numérateur et le dénominateur sont simplifiables, en fonction des valeurs de  $\omega$  par rapport à  $1/\tau_n$  et  $1/\tau_d$

# Exemple de tracé d'un diagramme de Bode (8)

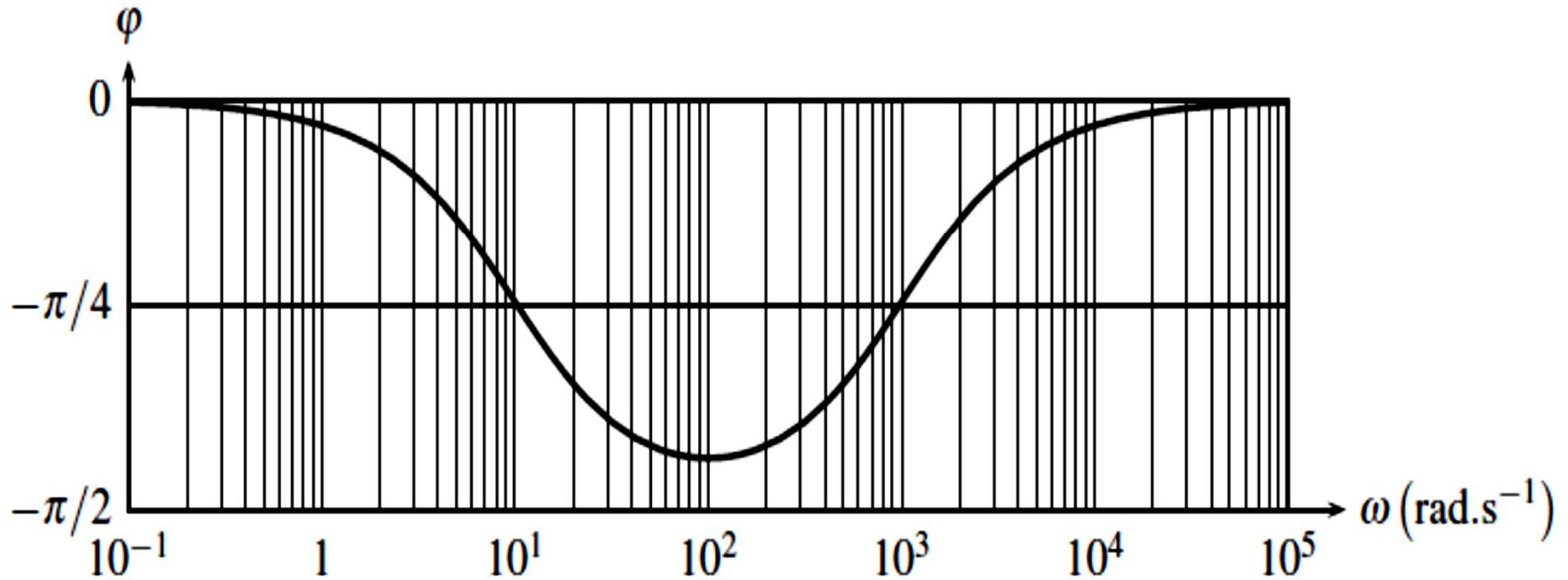
domaines de pulsation	$\omega \ll \frac{1}{(R_1 + R_2)C}$	$\frac{1}{(R_1 + R_2)C} \ll \omega \ll \frac{1}{R_2C}$	$\frac{1}{R_2C} \ll \omega$
numérateur $\simeq$	1	1	$jR_2C\omega$
dénominateur $\simeq$	1	$j(R_1 + R_2)C\omega$	$j(R_1 + R_2)C\omega$
$\underline{H}(j\omega) \simeq$	1	$\frac{1}{j(R_1 + R_2)C\omega}$	$\frac{R_1}{R_1 + R_2}$
$\varphi(\omega) \simeq$	0	$-\frac{\pi}{2}$	0
pente	nulle	-20 dB/décade	nulle

# Exemple de tracé d'un diagramme de Bode (9)



**Figure 11.10** – Gain du système avec  $R_2C = 10^{-3} \text{ rad.s}^{-1}$  et  $(R_1 + R_2)C = 10^{-1} \text{ rad.s}^{-1}$  (les asymptotes sont en gris).

# Exemple de tracé d'un diagramme de Bode (10)



**Figure 11.11** – Phase du système avec  $R_2C = 10^{-3}$  rad.s<sup>-1</sup> et  $(R_1 + R_2)C = 10^{-1}$  rad.s<sup>-1</sup>.

# Identification rapide de la nature d'un filtre

Il y a un moyen rapide de reconnaître la nature d'un filtre d'ordre 2 à partir de sa fonction de transfert à condition qu'elle ait été écrite sous forme de fraction rationnelle. Il faut écrire les polynômes en  $p$  (ou  $j\omega$ ) sous forme de puissance croissante comme  $a + bp + cp^2$  que l'on suppose être le numérateur. En recherchant les puissances présentes au numérateur on en déduit la nature du filtre :

- si on a  $a$  ou  $a + bp$  (« basses puissances ») alors c'est un passe bas,
- si on a  $bp$  (« puissance intermédiaire ») alors c'est un passe bande,
- si on a  $cp^2$  ou  $bp + cp^2$  (« hautes puissances ») alors c'est un passe haut,
- si on a  $a + cp^2$  alors il manque la puissance intermédiaire, c'est un coupe bande.

**Cette méthode est utilisable pour les filtres d'ordre 1.**



# Identification d'un filtre à partir de son gabarit (1)

## gabarit

Pour un filtre, un *gabarit* est l'ensemble des contraintes que celui-ci doit respecter.

Un gabarit permet de définir la fonction acceptable d'un filtre. Cette acceptabilité dépend de l'utilisation de celui-ci et est défini dans le cahier des charges du filtre.

## Identification d'un filtre à partir de son gabarit (2)

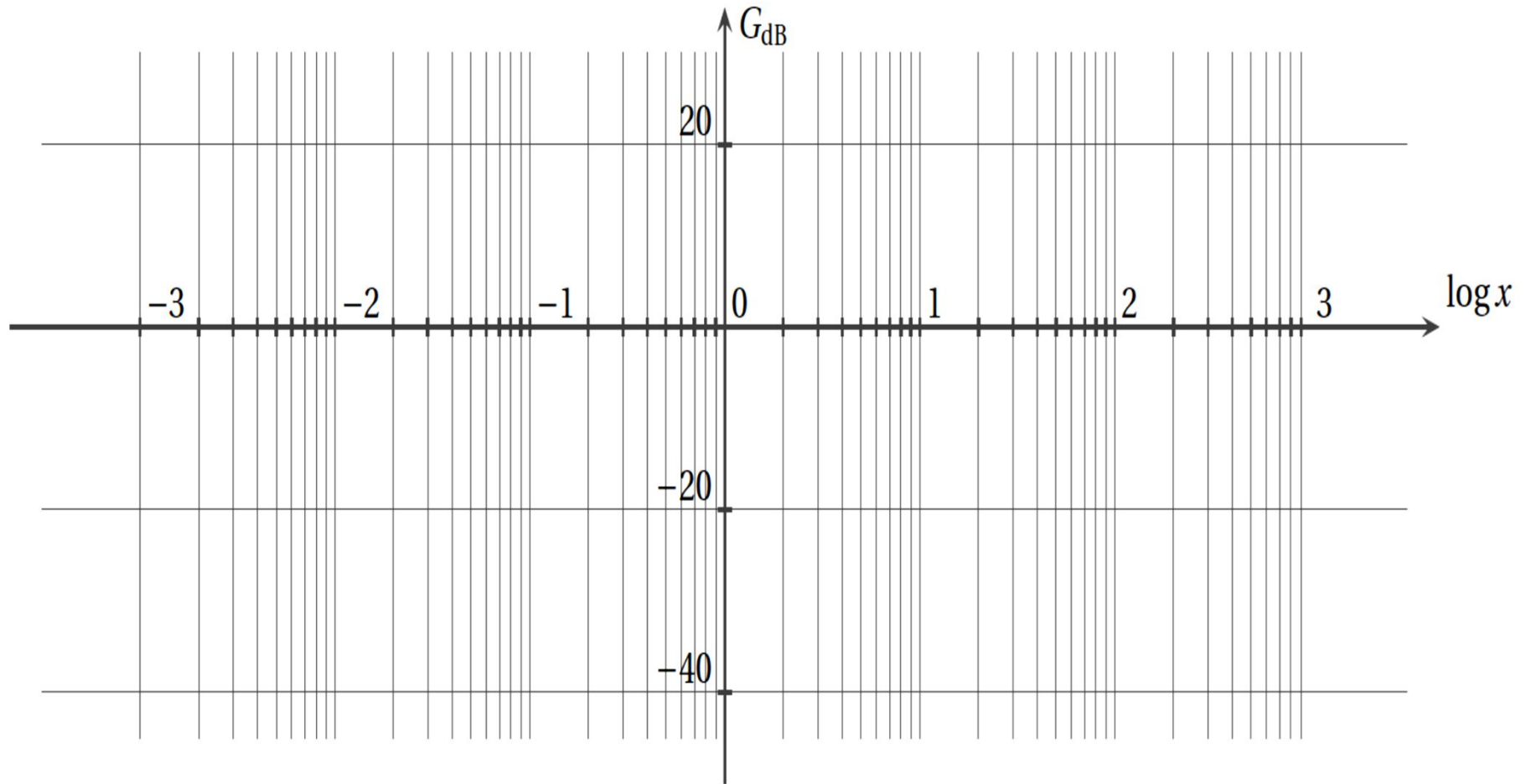
---

On cherche un filtre ayant les caractéristiques suivantes :

- le gain maximum est de  $G_{\text{dB,max}} = +10 \text{ dB}$  ;
- la fréquence de coupure à  $-3 \text{ dB}$  est  $f_c = 1,00 \text{ kHz}$  ;
- en dessous de  $f_c$  le gain du filtre est compris entre  $G_{\text{dB,max}}$  et  $G_{\text{dB,max}} - 3$  ;
- pour les fréquences  $f > 7f_c$  , le gain en décibel est inférieur à  $G_{\text{dB,max}} - 30 \text{ dB}$ .

Traduire les caractéristiques demandées sur le diagramme du gain en dB ci-dessous où l'abscisse est  $\log \frac{f}{f_c}$ .

# Identification d'un filtre à partir de son gabarit (3)



# Identification d'un filtre à partir de son gabarit (4)

---

2. Préciser si le filtre d'ordre 1 dont la fonction de transfert est

$$H(jx) = \frac{H_0}{1 + jx}$$

avec  $20 \log H_0 = 10$  convient.

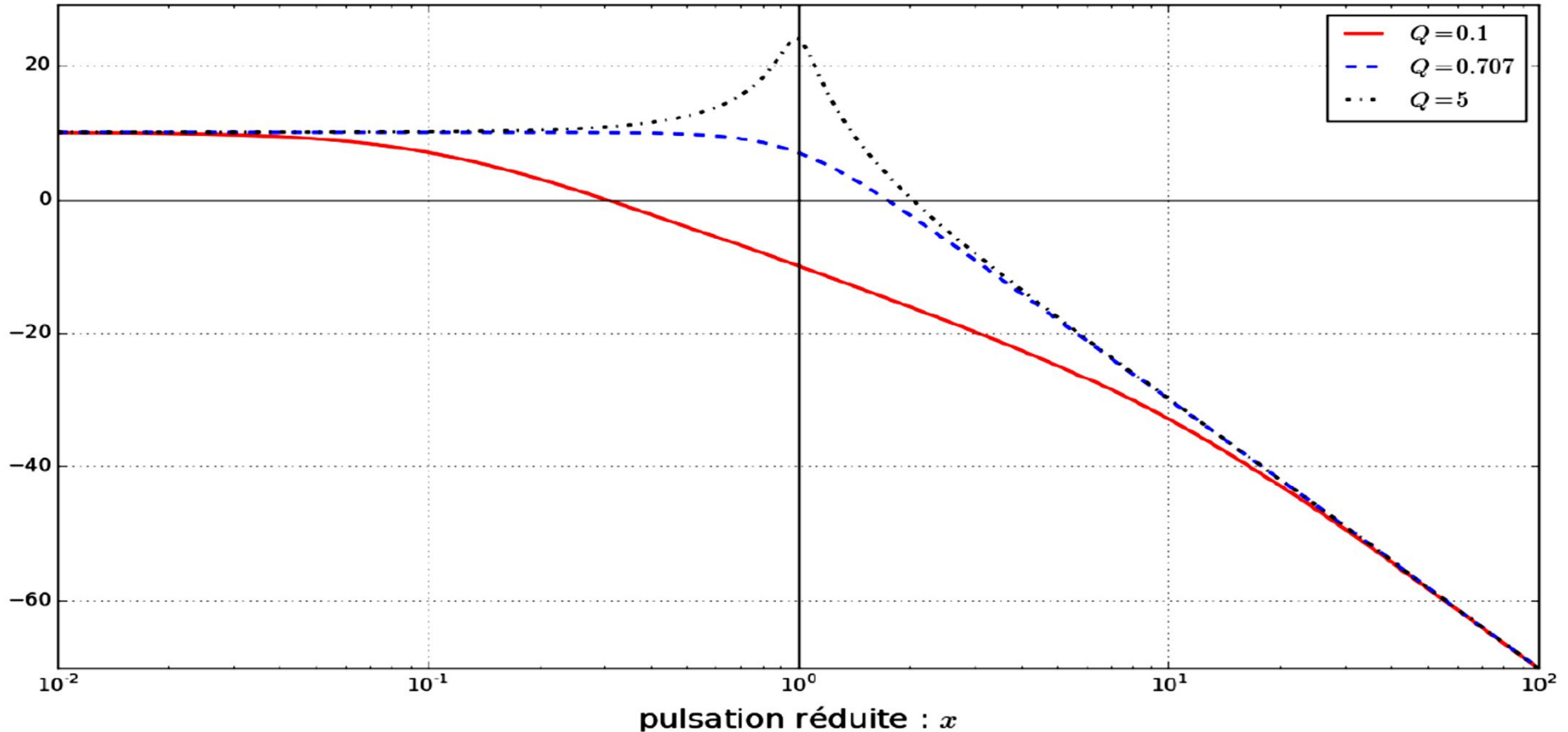
On essaye avec un filtre passe bas du 2<sup>ème</sup> ordre de fonction de transfert

$$H(jx) = \frac{H_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

avec  $20 \log H_0 = 10$ . On donne ci-dessous les tracés de 3 diagrammes de Bode du gain pour 3 valeurs du facteur de qualité  **$Q = 0, 1 ; 0,707$**

---

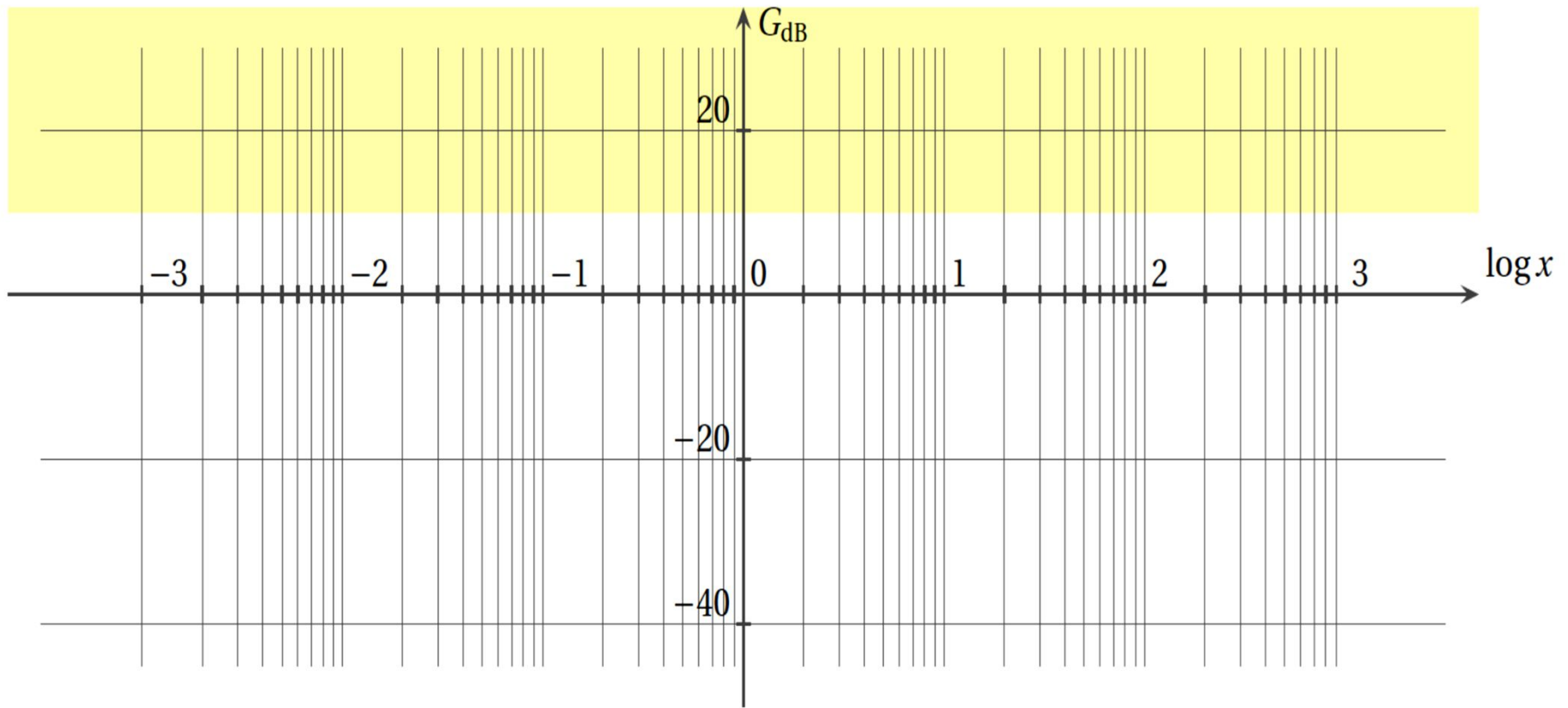
# Identification d'un filtre à partir de son gabarit (5)



3. Préciser si l'un des filtres d'ordre 2 correspond au gabarit demandé.

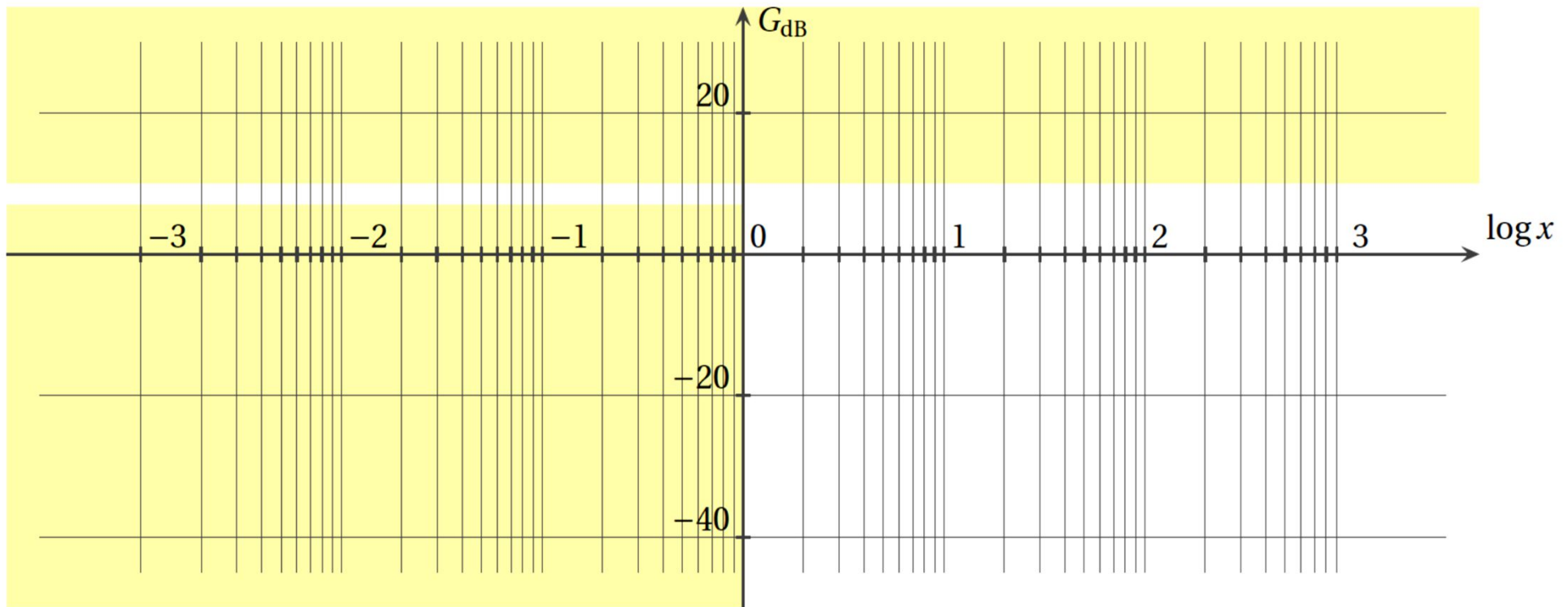
# Identification d'un filtre à partir de son gabarit (6)

1. La première contrainte nous impose que, quelle que soit la fréquence, le gain ne dépassera jamais +10 dB.



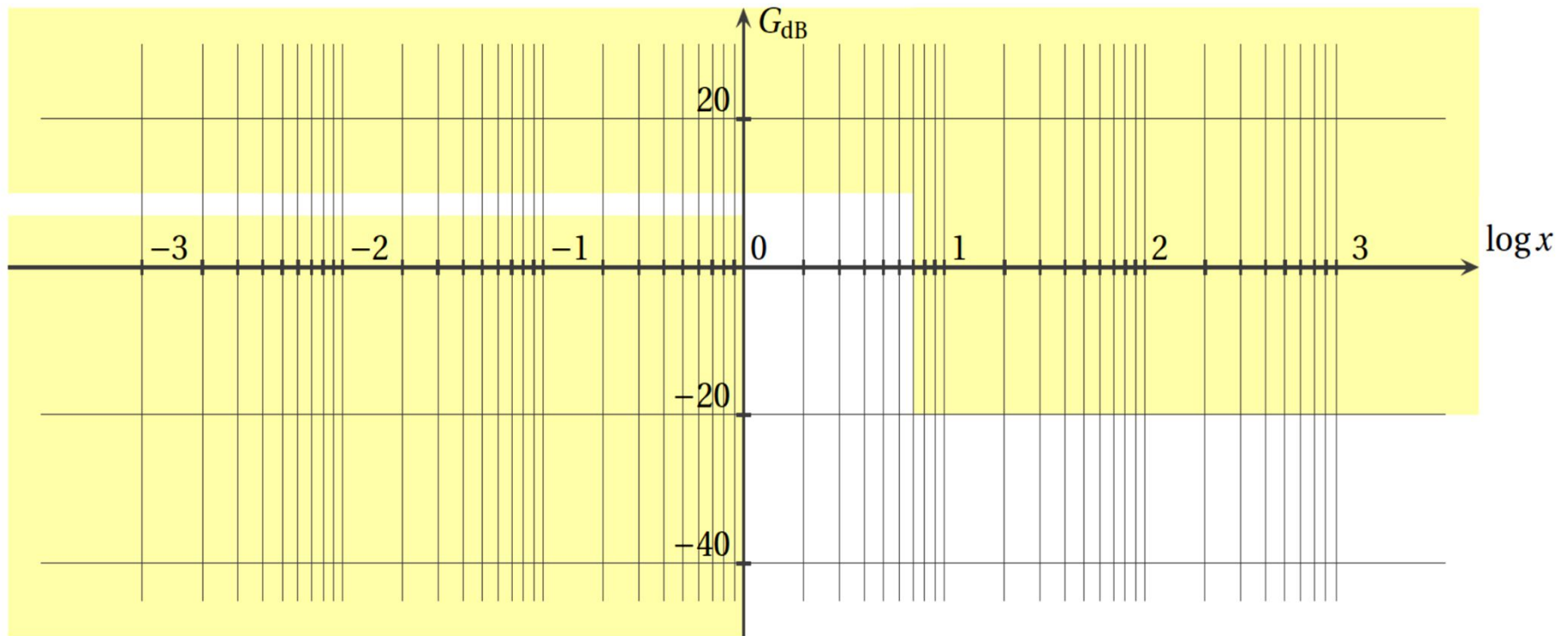
# Identification d'un filtre à partir de son gabarit (7)

La deuxième contrainte nous dit, à mots à peine couverts, qu'avant la fréquence de coupure, le gain est compris entre  $G_{\text{dB,max}}$  et  $G_{\text{dB,max}} - 3$ . Cela donne



# Identification d'un filtre à partir de son gabarit (8)

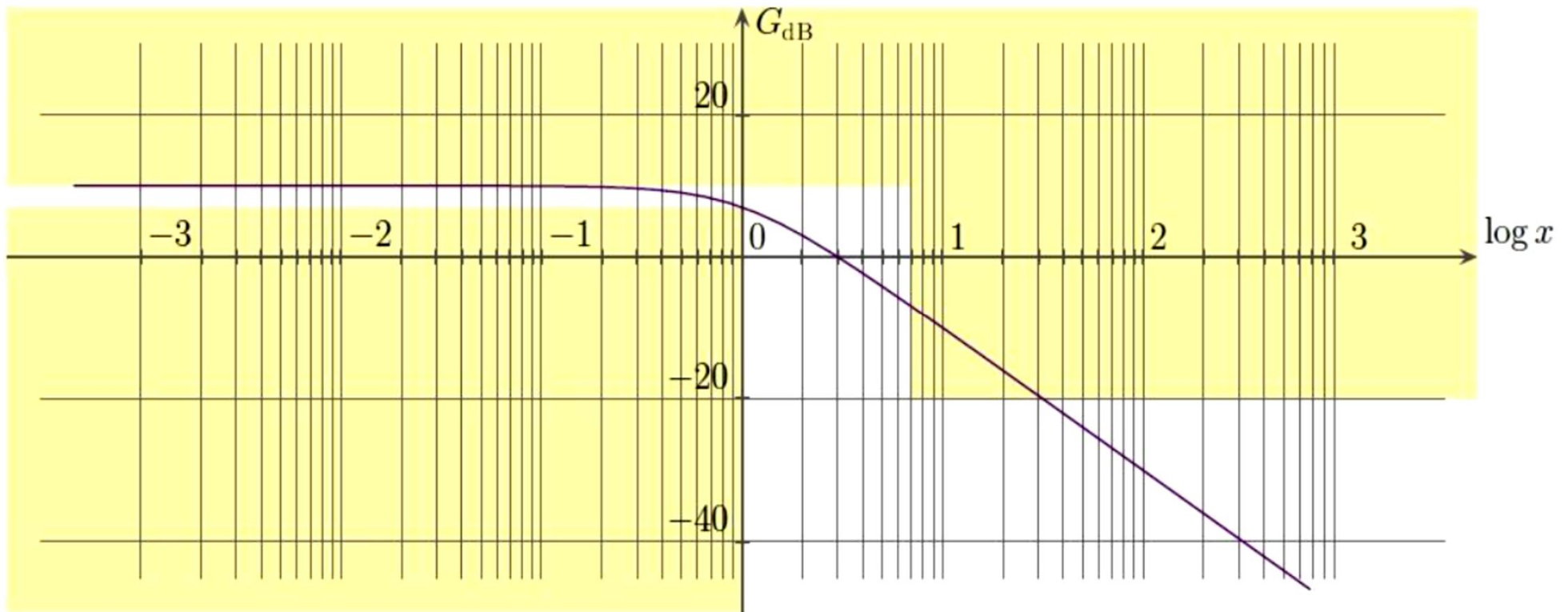
La dernière contrainte impose que pour  $f > 7f_c$ , i.e. pour  $\log x > \log 7$ , le gain soit inférieur à  $G_{\text{dB,max}} = -20$  dB. Nous arrivons donc à





# Identification d'un filtre à partir de son gabarit (9)

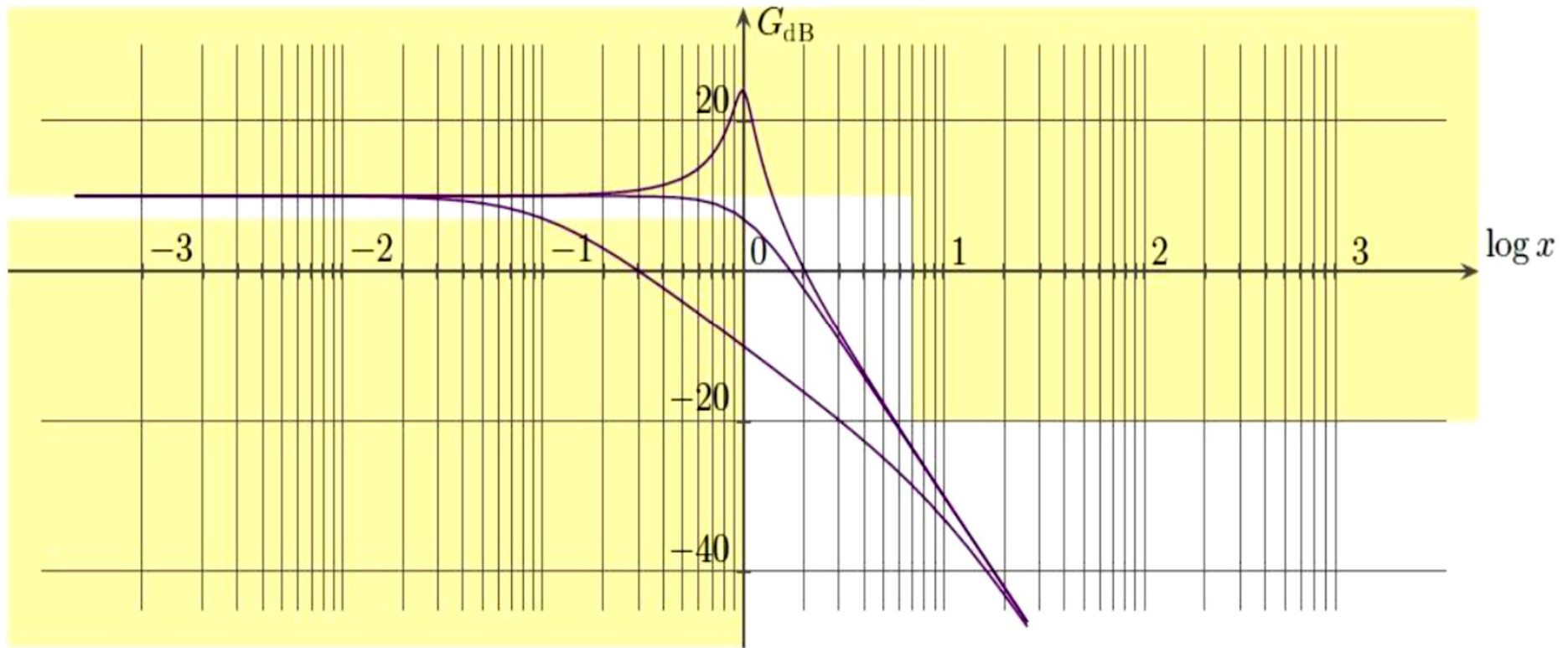
## 2. Filtre passe-bas d'ordre 1



Ce Filtre ne convient pas

# Identification d'un filtre à partir de son gabarit (10)

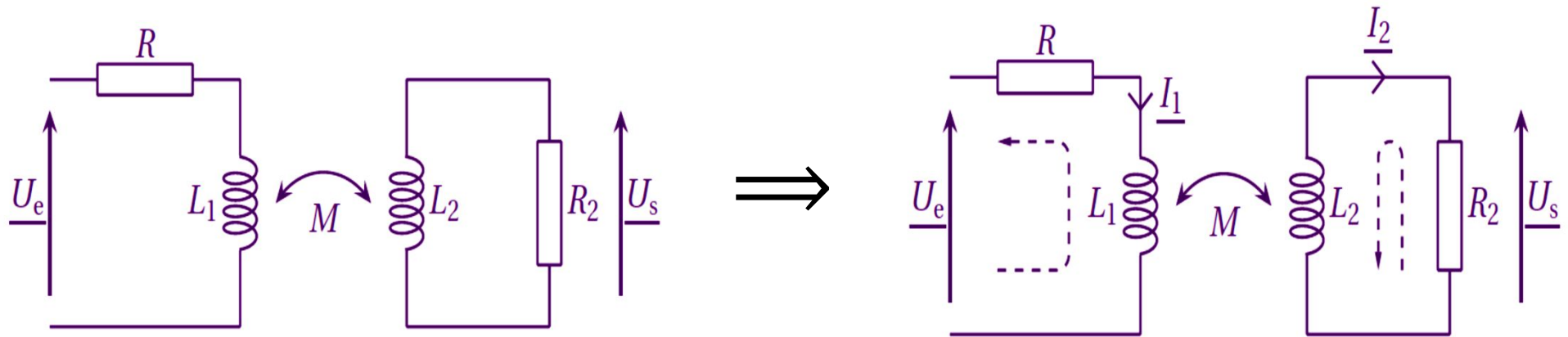
## 3. Filtre passe-bas d'ordre 2



Seul le filtre de facteur de qualité  $Q = 0,707$  convient. Il ne faut pas oublier, maintenant, qu'une fois le filtre choisi, il faut trouver le montage associé et les valeurs des composants.

# Filtre avec une mutuelle (1)

Considérons le filtre suivant



$$\begin{cases} jL_1\omega\underline{I}_1 + jM\omega\underline{I}_2 + R_1\underline{I}_1 - \underline{U}_e = 0 \\ jL_2\omega\underline{I}_2 + jM\omega\underline{I}_1 + R_2\underline{I}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (jL_1\omega + R_1)\underline{I}_1 + jM\omega\underline{I}_2 = \underline{U}_e \\ jM\omega\underline{I}_1 + (jL_2\omega + R_2)\underline{I}_2 = 0 \end{cases}$$

# Filtre avec une mutuelle (2)

Isolons  $\underline{I_2}$

$$\underline{I_2} = - \frac{j\omega M}{R_1 R_2 + j\omega(L_1 R_2 + L_2 R_1) + (j\omega)^2(L_1 L_2 - M^2)} \underline{U_e}$$

Et comme  $\underline{U_s} = R_2 \underline{I_2}$ , nous arrivons à la fonction de transfert suivante

$$\underline{H}(j\omega) = - \frac{j\omega M R_2}{R_1 R_2 + j\omega(L_1 R_2 + L_2 R_1) + (j\omega)^2(L_1 L_2 - M^2)}$$